2.úkol z MA1 **1. 10. 2024**

Odevzdání úkolu na přístím cvičení, tj. 15.10.2024

1. Pro reálné funkce

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ (definována jako zaokrouhlení na celé číslo dolů, např. $\lfloor 1,7 \rfloor = 1$, $\lfloor -2,5 \rfloor = -3$) a

$g(x) = \dfrac{(x+1)^2 - 4}{5}$

najděte obrazy množin $A_1 = \mathbb{R}$, $A_2 = \left(-\frac{5}{2}, 3\right]$ a vzory množin $B_1 = (0,1)$, $B_2 = \{2\}$.

Tedy těchto 8 množin:

$$f(A_1),\ f(A_2),\ g(A_1),\ g(A_2),\ f^{-1}(B_1),\ f^{-1}(B_2),\ g^{-1}(B_1),\ g^{-1}(B_2)\ .$$

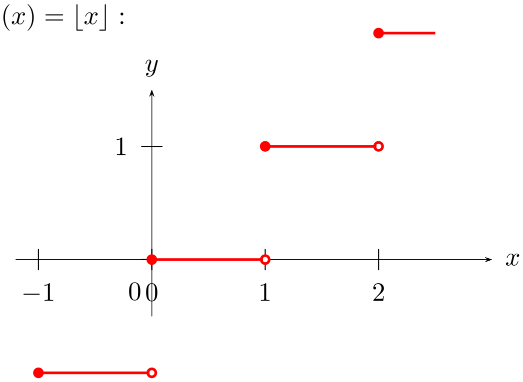
2. Pro reálné funkce dané předpisy $f(x) = \ln(x^2 - x)$ a $g(x) = \sqrt{x}$ najděte předpisy a definiční obory funkcí $f \circ g$ a $g \circ f$.

3. Dokažte nebo vyvraťte, že funkce dané následujícími předpisy jsou sudé/liché:

$$f(x) = \ln(x^2 + \sqrt{x^2+1}) \qquad\qquad f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})\ .$$

(Pozor, první dojem může klamat...)

1.Úloha - Řešení:
Pro $\varphi : X \to Y$ a $B \subseteq Y$ je $\varphi^{-1}(B) = \{x \in X \mid \varphi(x) \in B\}$ (tedy vzor množiny B při zobrazení φ).
Graf funkce $f(x) = \lfloor x \rfloor$:



Zřejmě je $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ a $f\big((-\frac{5}{2}, 3]\big) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Dále

$$f^{-1}\big((0,1)\big) = \emptyset$$

protože $(0,1) \cap f(\mathbb{R}) = (0,1) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. A nakonec

$$f^{-1}\big(\{2\}\big) = [2,3) \ .$$

Pro funkci g můžeme použít toto:

$$g(x) = (\alpha \circ h \circ \beta)(x)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, kde $\alpha(x) = \frac{x-4}{5}$, $h(x) = x^2$, $\beta(x) = x + 1$.
Takže

$$g(\mathbb{R}) = \alpha\Big(h\big(\beta(\mathbb{R})\big)\Big) = \alpha\big(h(\mathbb{R})\big) = \alpha\big([0, +\infty)\big) = [-\tfrac{4}{5}, +\infty)$$

a podobně

$$g\big((-\tfrac{5}{2}, 3]\big) = \alpha\Bigg(h\Big(\beta\big((-\tfrac{5}{2}, 3]\big)\Big)\Bigg) = \alpha\Big(\underbrace{h\big((-\tfrac{3}{2}, 4]\big)}_{[0,\frac{9}{4})\cup[0,16]}\Big) = \alpha\big([0,16]\big) = [-\tfrac{4}{5}, \tfrac{12}{5}] \ .$$

Dále

$$g^{-1}\big((0,1)\big) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < \frac{(x+1)^2 - 4}{5} < 1\}$$

$$0 < \frac{(x+1)^2 - 4}{5} < 1 \ \Leftrightarrow\ 0 < (x+1)^2 - 4 < 5 \ \Leftrightarrow\ 4 < (x+1)^2 < 9 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2 < |x - (-1)| < 3 \ \Leftrightarrow\ 2 < |x - (-1)| \ \&\ |x - (-1)| < 3 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad x \in \Big((-\infty, -3) \cup (1, \infty)\Big) \cap (-4, 2) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad x \in (-4, -3) \cup (1, 2)$$

tedy

$$g^{-1}\big((0,1)\big) = (-4, -3) \cup (1, 2)$$

kde jsme využili, že $|x - a| < \varepsilon$ znamená $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ pro $\varepsilon > 0$ (a podobně $|x - a| > \varepsilon$).
A nakonec

$$g^{-1}\big(\{2\}\big) = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{(x+1)^2 - 4}{5} = 2\} = \{-1 - \sqrt{14}, -1 + \sqrt{14}\}$$

2.Úloha - Řešení:

1. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln\left((\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}\right)$

   $D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \ \wedge \ \underbrace{(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}}_{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \ \wedge \ \sqrt{x} > 1\} = (1, +\infty)$

   pro $x \in D(f \circ g)$ se pak může funkce upravit jako $(f \circ g)(x) = \ln\left(x - \sqrt{x}\right)$

2. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\ln(x^2 - x)}$

   $D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x > 0 \ \wedge \ \underbrace{\ln(x^2 - x) \geq 0}_{\Leftrightarrow \ x^2 - x \geq 1}\} =$

   $= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x^2 - x - 1 = (x - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})\} = (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$

3.Úloha - Řešení:

Uvědomme si nejdříve, že pokud je funkce g současně sudá i lichá, pak je na svém definičním oboru D konstantně nulová, neboť pak máme $-g(x) = g(-x) = g(x)$, tedy $2g(x) = 0$ tudíž $g(x) = 0$ pro $x \in D$.

Funkce $f(x) = \ln(x^2 + \sqrt{x^2+1})$ má za definiční obor $\mathbb{R}$ a zřejmě pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(-x) = \ln\left((-x)^2 + \sqrt{(-x)^2 + 1}\right) = \ln(x^2 + \sqrt{x^2+1}) = f(x)$$

takže f je sudá (a není lichá protože není konstantně nulová).

Pro druhou funkci $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ zjistíme nejdříve definiční obor:

$$x + \sqrt{x^2+1} > 0 \ \Leftrightarrow \ \sqrt{x^2+1} > -x \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ -x \leq 0 \ \vee \ (-x > 0 \ \& \ \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 > (-x)^2) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ -x \leq 0 \ \vee \ (-x > 0 \ \& \ x^2 + 1 > x^2) \ \Leftrightarrow \ x \in \mathbb{R}$$

Tedy $D(f) = \mathbb{R}$. Funkce nevypadá jako sudá, zkusme to ukázat konkrétně:

$$f(-1) = \ln(-1 + \sqrt{(-1)^2 + 1}) = \ln(-1 + \sqrt{2})$$
$$f(1) = \ln(1 + \sqrt{1^2 + 1}) = \ln(1 + \sqrt{2})$$

protože $-1 + \sqrt{2} \neq 1 + \sqrt{2}$ a logaritmus je prostá funkce, tak máme $f(-1) \neq f(1)$ a f proto není sudá.

Dále se podívejme, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí, že $f(-x) = -f(x)$:

$$f(-x) = -f(x) \ \Leftrightarrow \ \ln(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2+1}) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) = \ln \tfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \sqrt{x^2+1} - x = \tfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ x \in \mathbb{R}$$

Tím jsme ukázali, že $f(-x) = -f(x)$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tedy f je lichá.