3.úkol z MA1 **8. 10. 2024**

Odevzdání úkolu: na příštím cvičení, tj. 15.10.2024

1. Nechť M je neprázdná podmnožina množiny reálných čísel. Dokažte (na základě definice suprema a infima), že pak platí

$$\sup\{-x \mid x \in M\} = -\inf(M) \ .$$

(Nápověda: Uvažujte zvlášť případ, kdy M je zdola neomezená a případ, kdy je naopak zdola omezená.)

2. Určete supremum, infimum, maximum a minimum množiny

$$\left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

(tj. nalezněte danou hodnotu a zdůvodněte, že má potřebné vlastnosti dle definice daného pojmu).

1.Úloha - Řešení:

Připomeňme, že množina $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ je zdola omezená právě když $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ a \leq x$.

(a) Nechť nejdříve M není zdola omezená, tj. $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists x \in M)\ a > x$.

Pak (podle definice) je $\inf(M) = -\infty$. Nyní potřebujeme ukázat, že $\sup\{-x \mid x \in M\} = \infty$, neboli, že množina $\{-x \mid x \in M\}$ není shora omezená:

Zvolme tedy $b \in \mathbb{R}$. Pak pro $a = -b \in \mathbb{R}$ podle předpokladu máme, že existuje $x \in M$ je $a > x$, tedy $(-b) > x$ neboli $b < -x$. Tak jsme ukázali, že skutečně množina $\{-x \mid x \in M\}$ není shora omezená.

Celkově tak máme, že

$$\sup\{-x \mid x \in M\} = \infty = -(-\infty) = -\inf(M)\ .$$

(b) Nechť nyní M je zdola omezená. Z vlastnosti tělesa $\mathbb{R}$ víme, že M má infimum. Označme tedy $i := \inf(M)$ a podle definice infima dostáváme, že

(I1) $(\forall x \in M)\ i \leq x$,

(I2) $(\forall i' \in \mathbb{R}, i < i')(\exists x \in M)\ x < i'$.

Potřebujeme nyní ukázat, že $\sup\{-x \mid x \in M\} = -i$, neboli

(S1) $(\forall x \in M)\ -x \leq -i$,

(S2) $(\forall s' \in \mathbb{R}, s' < -i)(\exists x \in M)\ s' < -x$.

Vlastnost (S1) plyne z (I1) tak, že z $i \leq x$ plyne ihned $-i \geq -x$.

Dále dokážeme vlastnost (S2): Vezmeme $s' \in \mathbb{R}$ takové, že $s' < -i$. Pak pro $i' := -s'$ platí, že $i' = -s' > i$ a proto z (I2) máme, že existuje $x \in M$, že $x < i' = -s'$. Tedy $-x > s'$, což jsme chtěli ukázat.

Celkově máme tedy

$$\sup\{-x \mid x \in M\} = -i = -\inf(M)\ .$$

- -

2.Úloha - Řešení:

Vyšetřujeme množinu $M = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ pro $a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Nejdříve si všimněme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí, tedy $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To je vidět ihned, protože

$$a_n = 1 - \tfrac{1}{n+1} < 1 - \tfrac{1}{n+2} = a_{n+1}\ .$$

Proto

(Mi1) $\frac{1}{2} = a_1 \leq a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,

(Mi2) $\frac{1}{2} = a_1 \in M$.

To znamená, že a_1 je minimum M a tedy i infimum množiny M.

(Toto je obecná vlastnost, kterou si pro pořádek dokážeme. Nechť $m \in \mathbb{R}$ je minimum nějaké množiny $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$. Pak platí (I1), tedy $(\forall x \in X)\ m \leq x$. A take platí (I2), tedy $(\forall i' \in \mathbb{R}, m < i')(\exists x \in X)\ x < i'$. To proto, že pro $i' \in \mathbb{R}$ takové, že $m < i'$, můžeme vzít $x := m \in X$. Tedy $m = \inf(X)$.)

Posloupnost se "přibližuje" k hodnotě 1. Nabízí se proto, že $\sup(M) = 1$. Ukážeme to z definice.

Vlastnost (S1) $(\forall x \in M)\ x \leq 1$:
Důkaz: Pro $x \in M$ máme $n \in \mathbb{N}$, že $x = a_n = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$.

Vlastnost (S2) $(\forall s' \in \mathbb{R}, s' < 1)(\exists x \in M)\ s' < x$:
Důkaz: Vezmeme $s' \in \mathbb{R}$ takové, že $s' < 1$ hledáme $n \in \mathbb{N}$, ze $s' < a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Upravme postupně poslední vztah, abychom našli, jaké má být n:

$$s' < 1 - \frac{1}{n+1} \iff \frac{1}{n+1} < 1 - s' \overset{1-s'>0}{\iff} \frac{1}{1-s'} < n+1 \iff \frac{1}{1-s'} - 1 < n$$

Nyní pro počáteční s' stačí vzít např.

$$n := \lfloor \frac{1}{1-s'} - 1 \rfloor + 1$$

(používáme funkci celou část $\lfloor \cdot \rfloor$), aby byla splněna poslední nerovnost. Tak splníme i původní nerovnost, čímž je důkaz dokončen.

(Poznámka: Vlastnost $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\ a \leq n$ není tak triviální, jak se na první pohled zdá, a musí se dokazovat, stejně jako to, že funkce "celá část" je dobře definovaná.)

A nakonec, protože platí $\sup(M) = 1$, ale $1 \notin M$, pak množina M nemá maximum. Důvodem je opět to, že pokud by maximum existovalo, muselo by být rovno supremu, ale to do množiny M nepatří.