

## 4. cvičení z Matematické analýzy 1

14. - 18. října 2024

**Úloha 1.** Rozhodněte, zda funkce  $f$  daná uvedeným předpisem je omezená na zadaných množinách  $A, B, C$ . Dokažte správnost odpovědi pomocí vhodného odhadu.

(a)  $f(x) = x \sin(x + 5)$   $A = D(f)$ ;  $B = (-100, 100)$ ;  $C = (1, R)$ ,  $R > 1$ .

(b)  $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$   $A = D(f)$ ;  $B = (3, \infty)$ ;  $C = (-2 + \varepsilon, 2 - \varepsilon)$ ,  $0 < \varepsilon$ .

(c)  $f(x) = \frac{\cos x}{x-1}$   $A = (0, 1)$ ;  $B = (0, 1 - \varepsilon)$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ ;  $C = (-\infty, 0)$

**Úloha 2.** Uvažujte funkci  $f$  zadanou předpisem níže. K zadané dvojici  $a, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  a zadanému  $\varepsilon > 0$  najděte  $\delta > 0$  takové, aby platilo

$$\forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

(a)  $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$ ;  $a = \infty$ ;  $L = 0$ .

(b)  $f(x) = (2x - 4) \sin \frac{1}{x-2}$ ;  $a = 2$ ;  $L = 0$ .

(c)  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ ;  $a = -2$ ;  $L = \infty$ .

(d)  $f(x) = \sqrt{x+1} + \cos(e^{\arctg x} - x^{15} + |3x - \sin e^{-x}|)$ ;  $a = \infty$ ;  $L = \infty$ .

Má úloha řešení pro následující parametry a libovolně malé  $\varepsilon > 0$ ?

(e)  $f(x) = x^2$ ;  $a = 2$ ;  $L = 3$ .

(f)  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ;  $a = 0$ ;  $L = 0$ .

**Úloha 3.** Určete maximální intervaly, na kterých jsou dané funkce rostoucí (resp. klesající). Maximální interval je takový, který nelze prodloužit tak, aby na novém intervalu měla funkce stále danou vlastnost.

(a)  $f(x) = \sin(x^2)$ ,

(b)  $f(x) = \arctg\left(\frac{1}{x}\right)$ ,

(c)  $h(x) = ||x| - 1| - 1|$

**Úloha 4.** Předpokládejte, že  $f, g$  jsou **nezáporné** funkce definované na  $\mathbb{R}$ . Doplňte následující tabulku ( $\uparrow$  = daná funkce je rostoucí,  $\downarrow$  = daná funkce je klesající, N = nelze obecně rozhodnout).

| $f$          | $g$          | $f + g$ | $f \cdot g$ | $f \circ g$ |
|--------------|--------------|---------|-------------|-------------|
| $\uparrow$   | $\uparrow$   |         |             |             |
| $\uparrow$   | $\downarrow$ |         |             |             |
| $\downarrow$ | $\uparrow$   |         |             |             |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ |         |             |             |

Rozhodněte dále, jak se tabulka změní, pokud přestaneme předpokládat, že funkce jsou nezáporné. (Můžete ještě dále uvažovat i variantu, že obě funkce jsou nekladné nebo že jedna je nekladná a druhá nezáporná.)