

5. cvičení z Matematické analýzy 1

21. - 25. října 2024

Úloha 1. Určete následující limity (případně jednostranné), nebo ukažte, že neexistují. Vždy nejdříve ověřte, že daná funkce je definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu, ve kterém je limita zkoumána. V této úloze využijte větu o aritmetice limit a její důsledky.

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2 + 4}{3x^2 + 7}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x + 1}{(3x^2 + 1)^2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 2x - 3}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{(x - 3)^2}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{cotgh} x$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x+1} - e^{x+3}}{(e^x + 1)(e^{x+2} + 2)}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{x^3 + 5} \sin x$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1 + \sin \frac{1}{x}}{x + 1}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\max\{1, x\} - 1}{x - 1} x$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|(2x + 1)}$$

Úloha 2. Určete následující limity (případně jednostranné), nebo ukažte, že neexistují. Vždy nejdříve ověřte, že daná funkce je definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu, ve kterém je limita zkoumána. V této úloze využijte větu o dvou polícajtech a podle potřeby větu o aritmetice limit.

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \cos(\sqrt{x} + e^x)}{2x^2 - x + 10}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \sin x}{e^x + \cos x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + \operatorname{arctg}(\ln x)}{e^{2x-3} + 4}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 1)^3 + \ln(2 + \sin x)}{4x^3 + 1 + \operatorname{arctg}(\cos x)}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2}{\cos x + x \sin \frac{1}{x}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{1 + (e^x - e^2) \cos \frac{1}{x-2}}$$

Úloha 3. Spočítejte následující limity nebo ukažte, že neexistují. Existují-li alespoň jednostranné limity, najděte ty. Uvádějte zdůvodnění.

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} x + \cos(x^2)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} ax + x \cos x, \quad a \in \mathbb{R}$$

Úloha 4. Určete definiční obor funkcí daných následujícími předpisy a jejich jednostranné limity v krajních bodech definičního oboru. Uvádějte zdůvodnění.

$$(a) f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{1}{x-3}}$$

$$(b) f(x) = \arcsin \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$(d) f(x) = \operatorname{arctg}(\ln(x^3 - 8))$$