5.úkol z MA1 **22. 10. 2024**

Odevzdání úkolu: na příštím cvičení z MA1, tj. 5. 11. 2024

1. Vyšetřete limity:

(a)

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{18x^3 - 3x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 2x - 1}$$

(b)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2^{3x} \cdot \operatorname{tg}(\cos x) + 3^{(x+1)^2} \cdot 3^{-x^2}}{9^{x-1} - 3^{x + \sin(e^{4x})}}$$

Použití L'Hospitalova pravidla je zde zakázáno. SVÉ ZÁVĚRY ŘÁDNĚ ZDŮVODNĚTE!! (odkazem na známé věty z přednášky).

2. Najděte příklady funkcí f a g, které jsou definované na nějakém okolí bodu 0 a které splňují vždy jednu z následujících podmínek:

(a) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ a $\lim_{x \to 0} g(x)$ neexistuje a $\lim_{x \to 0} f(x)g(x) = c$ pro dané $c \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ a $\lim_{x \to 0} g(x)$ neexistuje a $\lim_{x \to 0} f(x)g(x) = \infty$.

(c) $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \to 0} g(x)$ neexistuje a $\lim_{x \to 0} f(x)g(x)$ existuje.

Vše řádně zdůvodněte.

Nápověda k Úloze 1:

(a) Jestliže má polynom $f(x)$ kořen x_0, tj. $f(x_0) = 0$, lze ho napsat jako $f(x) = (x - x_0)g(x)$ pro nějaký polynom $g(x)$. Polynom $g(x)$ získáme dělením polynomů.

(b) Nezapomeňte zdůvodnit, že funkce je definovaná na nějakém okolí ∞. Uvědomte si pořádně, jaké jsou definiční obory funkcí v zadání! Nenechte se zaskočit složitějším zápisem. Výraz si zjednodušte. pak se zamyslete, které členy jsou vedoucí ve výrazech v čitateli a jmenovateli.

Řešení Úlohy 1:

(a) Polynom $3x^2+2x-1$ je nulový maximálně ve dvou bodech a a b (každý polynom stupně n má nejvýše n kořenů), tedy definiční obor funkce $f(x)=\frac{18x^3-3x^2-4x+1}{3x^2+2x-1}$ je $D(f)=\mathbb{R}\setminus$ "konečná množina". A proto je funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $\frac{1}{3}$.

V bodě $\frac{1}{3}$ se čitatel i jmenovatel vynuluje, je to tedy typ limity $\frac{0}{0}$. Oba polynomy se tak dají vydělit společným polynomem $x-\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{rl}
18x^3-3x^2-4x+1: & (x-\frac{1}{3}) = 18x^2+3x-3 \\
-18x^3+6x^2 \quad\quad\quad\quad & \\
\hline
3x^2-4x \quad\;\; & \\
-3x^2+x \quad\;\; & \\
\hline
-3x+1 & \\
3x-1 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

U kvadratického polynomu můžeme druhý kořen uhádnout pomocí Viétových vzorců, tedy

$$3x^2+2x-1=3\left(x-\tfrac{1}{3}\right)(x+1)$$

Takže

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{18x^3-3x^2-4x+1}{3x^2+2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{(x-\frac{1}{3})(18x^2+3x-3)}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+1)}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{18x^2+3x-3}{3\,(x+1)}=$$

$$=\frac{18\cdot(\frac{1}{3})^2+3\cdot\frac{1}{3}-3}{3(\frac{1}{3}+1)}=0$$

Kde jsme použili věty o součinu, součtu a podílu limit a základní limitu $\lim\limits_{x\to a}x^n=a^n$ pro $a\in\mathbb{R}$ a $n\in\mathbb{N}$.

(b) Vyšetříme, jestli je funkce definovaná na nějakém okolí ∞:

- Protože $\cos x\in\langle -1,1\rangle\subseteq\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, je funkce $\mathrm{tg}(\cos x)$ dobře definovaná pro všechna $x\in\mathbb{R}$. Protože tg je rostoucí, máme $\mathrm{tg}(-1)\le\mathrm{tg}(\cos x)\le\mathrm{tg}(1)$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$, tedy funkce $\mathrm{tg}(\cos x)$ je omezená.
- $9^{x-1}-3^{x+\sin(e^{4x})}=3^{2x-2}-3^{x+\sin(e^{4x})}\ge 3^{2x-2}-3^{x+1}=3^{x+1}(3^{x-3}-1)>0$ pro $x-3>0$

Tedy funkce z limity je definovaná na okolí $(3,\infty)$ bodu ∞. Nyní určíme limitu:

$$\frac{2^{3x}\cdot\mathrm{tg}(\cos x)+3^{(x+1)^2}\cdot 3^{-x^2}}{9^{x-1}-3^{x+\sin(e^{4x})}}=\frac{3^{(x+1)^2-x^2}+2^{3x}\cdot\mathrm{tg}(\cos x)}{3^{2x-2}-3^{x+\sin(e^{4x})}}=$$

$$= \frac{3^{2x+1} + 2^{3x} \cdot \operatorname{tg}(\cos x)}{3^{2x-2} - 3^{x+\sin(e^{4x})}} = \frac{3^{2x}}{3^{2x}} \cdot \frac{3 + \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^x \cdot \operatorname{tg}(\cos x)}{3^{-2} - \frac{3^{\sin(e^{4x})}}{3^x}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{3}{3^{-2}} = 27$$

Kde jsme použili:

- $\left(\dfrac{2^3}{3^2}\right)^x = \left(\dfrac{8}{9}\right)^x \xrightarrow{x\to\infty} 0$ (jedna ze základních limit),
- $\left(\dfrac{2^3}{3^2}\right)^x \cdot \operatorname{tg}(\cos x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$ podle věty o součinu nulové limity a omezené funkce,
- $3^{-1} \leq 3^{\sin(e^{4x})} \leq 3^1$, tedy funkce $3^{\sin(e^{4x})}$ je omezená na $\mathbb{R}$,
- $\dfrac{1}{3^x} \cdot 3^{\sin(e^{4x})} \xrightarrow{x\to\infty} 0$, podle věty o součinu nulové limity a omezené funkce,
- věty o součtu a podílu limit.

Řešení Úlohy 2:

(a) Pro $c \in \mathbb{R}$, volme $f(x) = cx$ a $g(x) = \frac{1}{x}$. Pak je $f(x)g(x) = c$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zbytek je snadno vidět.

(b) Volme $f(x) = x$ a $g(x) = \frac{1}{x^3}$. Pak je $f(x)g(x) = \frac{1}{x^2}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zbytek je snadno vidět.

(c) Volme $f(x) = \frac{1}{x^2}$ a $g(x) = 2 + \sin\frac{1}{x}$. Pak $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ neexistuje, protože kdyby ano, pak i limita $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (g(x) - 2) = \left(\lim\limits_{x\to 0} g(x)\right) - 2$ existuje, což je spor (s tvrzením z přednášky o limitě funkce $\sin\frac{1}{x}$).

A nakonec je $f(x)g(x) = \frac{2+\sin\frac{1}{x}}{x^2} \geq \frac{2-1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ a $\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} \infty$ takže podle věty odhadu limit máme $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = \infty$, tedy tato limita existuje.