6.úkol z MA1 **29. 10. 2024**

Odevzdání úkolu: na příštím cvičení z MA1, tj. 5. 11. 2024

1. Nechť f je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Dokažte následující tvrzení:

(a) Pokud $\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$, pak je funkce f omezená na nějakém prstencovém okolí bodu a.

(b) Pokud $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, pak je funkce f *zdola* omezená na nějakém prstencovém okolí bodu a.

(c) Pokud $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, pak je funkce f *shora* omezená na nějakém prstencovém okolí bodu a.

(d) Pokud funkce f na každém prstencovém okolí bodu a není ani shora omezená ani zdola omezená, pak $\lim_{x \to a} f(x)$ neexistuje.

2. Vyšetřete limitu

$$\lim_{x \to \infty} ax + x \cos x$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$. Své závěry zdůvodněte.

Nápověda: Pro existenci limity použijte odhady a věty o odhadech limit ("dva pojicajti" a podobné). Pro neexistenci limity použijte tvrzení z Úlohy 1.

Řešení Úlohy 1:

(a) Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon = 1$. Podle definice limity existuje $\delta > 0$, že pro všechna $x \in P(a,\delta)$ ke $f(x) \in U(c,1) = (c-1, c+1)$. Tedy f je na tomto prstencovém okolí $P(a,\delta)$ omezená.

(b) Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Zvolme $\varepsilon = 1$. Podle definice limity existuje $\delta > 0$, že pro všechna $x \in P(a,\delta)$ ke $f(x) \in U(\infty,1) = (1,\infty)$. Tedy f je na tomto prstencovém okolí $P(a,\delta)$ zdola omezená.

(c) Buď se udělá analogicky jako v (b) nebo to můžeme přímo na základě části (b) dokázat tak, že si vezmeme $g(x) := -f(x)$. Pokud je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, pak $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ a podle (b) existuje $K \in \mathbb{R}$, ze $-f(x) = g(x) \geq K$ pro všechna x z prst. okolí a, tedy $f(x) \leq -K$, takže f naopak shora omezená na tomto okolí.

(d) Sporem: Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje. Pak je buď konečná, nebo rovna ∞ nebo $-\infty$. Podle (a), (b) nebo (c) by pak na nějakém prstencovém okolí a musela být buď zdola omezená nebo shora omezená. To je ale spor s předpokladem.

Řešení Úlohy 2:

Pro $x > 0$ máme

$$f(x) = ax + x\cos x = x(a + \cos x) \geq x(a-1)$$

$$f(x) = ax + x\cos x = x(a + \cos x) \leq x(a+1)$$

Pokud je tedy $a > 1$, pak $\lim\limits_{x\to\infty} x(a-1) = \infty$ a podle věty o odhadu limit je pak také $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Podobně, pokud je $a < -1$, pak $\lim\limits_{x\to\infty} x(a+1) = -\infty$ a podle věty o odhadu limit je pak také $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

Pro $-1 \leq a \leq 1$ ukážeme, že limita neexistuje. Nejdříve si uvědomme tyto vlastnosti:

(i) Pro $-1 < a$ je funkce $f(x)$ na každém okolí ∞ shora neomezená, tedy

$$(\forall\delta > 0)(\forall K > 0)(\exists x \in \mathbb{R})\ x > \delta\ \&\ f(x) > K$$

Důkaz: Nechť $\delta > 0$ a $K > 0$. Zvolme $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Požadavek

$$x = 2k\pi > \delta \quad \text{a} \quad f(x) = 2k\pi(a + \cos(2k\pi)) = 2k\pi(a+1) > K$$

je splněn právě když $k > \max\left\{\frac{\delta}{2\pi}, \frac{K}{2\pi(a+1)}\right\}$, které zvolíme obvyklým způsobem.

(ii) Pro $a < 1$ je funkce $f(x)$ na každém okolí ∞ zdola neomezená, tedy

$$(\forall\delta > 0)(\forall K > 0)(\exists x \in \mathbb{R})\ x > \delta\ \&\ f(x) < -K$$

Důkaz: Nechť $\delta > 0$ a $K > 0$. Zvolme $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Požadavek

$$x = (2k+1)\pi > \delta \quad \text{a} \quad f(x) = (2k+1)\pi(a + \cos(2k+1)\pi) = (2k+1)\pi(a-1) < -K$$

je splněn právě když $k > \max\left\{\frac{1}{2}(\frac{\delta}{\pi} - 1), \frac{1}{2}(\frac{K}{(1-a)\pi} - 1)\right\}$, které zvolíme obvyklým způsobem.

(iii) Pro $a = 1$ nebo $a = -1$ nabývá funkce $f(x)$ hodnoty 0 na každém okolí ∞, tedy

$$(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})\ x > \delta\ \&\ f(x) = 0$$

Důkaz: Nechť $\delta > 0$. Pro $a = 1$ zvolme $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Pak je $f(x) = (2k+1)\pi(1 + \cos(2k+1)\pi) = 0$. Požadavek $x = (2k+1)\pi > \delta$ je splněn právě když $k > \frac{1}{2}(\frac{\delta}{\pi} - 1)$, které zvolíme obvyklým způsobem.

Pro $a = -1$ zvolme $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Pak je $f(x) = 2k\pi(-1 + \cos 2k\pi) = 0$. Požadavek $x = 2k\pi > \delta$ je splněn právě když $k > \frac{\delta}{2\pi}$, které zvolíme obvyklým způsobem.

Nyní tedy pro $a \in (-1, 1)$ je funkce $f(x)$ shora i zdola neomezená na každém okolí ∞. Tedy (podle Úlohy 1 (d)) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ neexistuje.

Pro $a = 1$ je funkce $f(x)$ na každém okolí ∞ shora neomezená, tedy pokud by $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existovala, musela by být (podle Úlohy 1 (a),(c)) pouze rovna hodnotě ∞. To by ale zase byl spor s (iii). Takže limita pro $a = 1$ neexistuje.

Podobně se pro $a = -1$ pomocí Úlohy 1 (a),(b) a (iii) ukáže, že limita také neexistuje.

Celkem

$$\lim_{x\to\infty} ax + x\cos x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & a < -1 \\ \text{neex.}, & -1 \leq a \leq 1 \end{cases}$$

Pro důkaz, že limita neexistuje lze využít důsledek Heineho věty (pokud už ji máme k dispozici) v této formě:

Mějme $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a funkci f definovanou na okolí b. Pokud existují posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ takové, že

- $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$,
- $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ a $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ existují a jsou různé

pak $\lim_{x\to b} f(x)$ neexistuje.

Pak zvolíme prostě $x_n = 2n\pi$ a $y_n = (2n+1)\pi$ pro $n \in \mathbb{N}$. Zbytek je podobný jako výše.