7. cvičení z Matematické analýzy 1

4. - 8. listopadu 2024

Úloha 1. Vyšetřete existenci následujících limit, případně jejich jednostranných verzí. Uvádějte zdůvodnění.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{3x^2+5}{(2x+1)^2}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \exp\left(\dfrac{x+\sin x}{2x-\cos x}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+4}-\sqrt{9x^2-2}}{\sqrt{4x^2+7}-2x}$ (e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-1}}{4-x^2}$ (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+\sin x}-\sqrt{x+1}\right)$

Úloha 2. Spočítejte následující limity nebo ukažte, že neexistují. Existují-li alespoň jednostranné limity, najděte ty. Uvádějte zdůvodnění.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{\ln x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{tg}(x-2)}{e^x-e^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(\sin x)}{e^x-1}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{tg}^2 x}-1}{\sin(x^2)}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6^x-1}{2^x-1}$ (f) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(\cos(x-3))}{\operatorname{arctg}(x^2-6x+9)}$

(g) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\operatorname{tg}(x-5)}{(x-5)^2}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{e^{ax^b}-1}{x}, \quad a,b\in\mathbb{R}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{e^{\frac{x}{3}}-1}$ (j) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2x+1}-3\right)}{x-4}$

Úloha 3. Vyšetřete existenci následujících limit, případně jejich jednostranných verzí. Symboly $a,b\in(0,\infty)$ jsou parametry. Uvádějte zdůvodnění.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{ax+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x^2-2}{4-x}\right)^{\frac{1}{x^2-3x+2}}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4^x+1}{4^x-1}\right)^{\frac{2^{2x+1}-1}{3^x+5}}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{\dfrac{3^x+1}{2^x+1}}$ (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{\dfrac{a^x+b^x}{1+b^x}}$

Úloha 4. Určete, pro které hodnoty parametru $\alpha\in\mathbb{R}$ jsou následující limity rovny nenulovému reálnému číslu.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(e^{x^2}-1)}{x^\alpha}$ (b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\ln^2(3+x)\right)}{(x+2)^\alpha}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{x^\alpha}$