7.úkol z MA1 **5. 11. 2024**

Odevzdání úkolu: na příštím cvičení z MA1

1. Vyšetřete limity funkce

$$f(x) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{2}\sin(3x))}{3^{2x} - 1}$$

(a) v bodě 0,

(b) v bodě $+\infty$,

(c) v bodě $-\infty$.

Použití L'Hospitalova pravidla je zde zakázáno. SVÉ ZÁVĚRY ŘÁDNĚ ZDŮVODNĚTE!!

2. Vyšetřete limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 1} \right)^{x^2 - x + 3}$$

Použití L'Hospitalova pravidla je zde zakázáno. SVÉ ZÁVĚRY ŘÁDNĚ ZDŮVODNĚTE!! (Použijte definici vztahu $a^b = e^{b\ln(a)}$ pro $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$.)

Řešení 1:

Vyšetříme definiční obor funkce f: Musí platit $1+\frac{1}{2}\sin(3x) > 0$ neboli $\sin(3x) > -2$, což platí vždy. Dále funkce $3^{2x} - 1 = e^{2x\ln 3} - 1$ je nulová právě jen pro $x = 0$. Tedy $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Limita je typu $\frac{0}{0}$, což je neurčitý výraz. Využijeme základní limity a výraz příslušně rozšíříme:

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{2}\sin(3x))}{3^{2x}-1} = \underbrace{\frac{\ln(1+\frac{1}{2}\sin(3x))}{\frac{1}{2}\sin(3x)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{2}\sin(3x)}{3x}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{3x}{2x\ln 3}}_{=\frac{3}{2\ln 3}} \cdot \underbrace{\frac{2x\ln 3}{e^{2x\ln 3}-1}}_{\to 1}$$

kde jsme použili větu o limitě složené funkce v těchto případech (z nichž bude také vidět, že jsme rozšiřovali nenulovými výrazy):

1.
   - $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1$
   - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}\sin(3x) = 0$
   - vnitřní funkce $\frac{1}{2}\sin(3x)$ se vyhne hodnotě $z = 0$ na nějakém prsten. okolí bodu $x = 0$

2.
   - $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$
   - $\lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$
   - vnitřní funkce $3x$ se vyhne hodnotě $z = 0$ na nějakém prsten. okolí bodu $x = 0$

3.
   - $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{e^z-1} = 1$
   - $\lim\limits_{x\to 0} 2x\ln 3 = 0$
   - vnitřní funkce $2x\ln 3$ se vyhne hodnotě $z = 0$ na nějakém prsten. okolí bodu $x = 0$

Podle vět o aritmetice limit tedy je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\frac{1}{2}\sin(3x))}{3^{2x}-1} = \frac{3}{4\ln 3}$$

(b) Máme $1 - \frac{1}{2} \leq 1 + \frac{1}{2}\sin(3x) \leq 1 + \frac{1}{2}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, takže funkce $\ln(1+\frac{1}{2}\sin(3x))$ je omezená na $\mathbb{R}$.

Dále $\lim\limits_{x\to\infty} 3^{2x} - 1 = \lim\limits_{x\to\infty} 9^x - 1 = \infty$, protože jde o základní limitu (a aritmetiku limit). Proto podle věty „$\frac{\text{omezená}}{\infty}$" máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{2}\sin(3x))}{3^{2x}-1} = 0$$

(c) Ukážeme, že limita neexistuje. Můžeme využít Heineho větu - to je jednodušší (pokud ji ještě nemáme k dispozici, ukážeme to jinak níže).

Pomocí Heineho věty: Vezmeme posloupnosti $x_n = \frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} - 2\pi n)$ a $y_n = \frac{1}{3}(\frac{3\pi}{2} - 2\pi n)$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Pak je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$
a

$$f(x_n) = \frac{\ln(1+\frac{1}{2})}{3^{2x_n}-1} \overset{n\to-\infty}{\longrightarrow} -\ln(1+\tfrac{1}{2})$$

$$f(y_n) = \frac{\ln(1-\frac{1}{2})}{3^{2y_n}-1} \overset{n\to-\infty}{\longrightarrow} -\ln(1-\tfrac{1}{2})$$

což plyne z věty o limitě složené funkce (kde vnitřní funkci nahradíme posloupností). Dostali jsem dvě různé hodnoty a tedy příslušná limita funkce neexistuje.

Jiný postup: Využijeme toho, že víme, že $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$ neexistuje. Postupujme sporem:

Nechť $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ existuje. Postupně "očistíme" původní funkci $f(x)$, abychom získali funkci $\sin x$.

Protože

$$\ln(1+\tfrac{1}{2}\sin(3x)) = f(x)\cdot(3^{2x}-1)$$

a $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{2x} - 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 9^x - 1 = -1$ (základní limita a aritmetika limit), tak pak (z věty o limitě součinu) existuje i limita $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+\frac{1}{2}\sin(3x))$.

Dále použijeme větu o limitě složené funkce - vnější funkce $g(y) = e^y$ je spojitá (a má limity "kdekoliv"), takže existuje také limita

$$\lim_{x\to-\infty} g\left(\ln(1+\tfrac{1}{2}\sin(3x))\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{2}\sin(3x))} = \lim_{x\to-\infty} 1+\tfrac{1}{2}\sin(3x)$$

Podobným způsobem (aritmetika a existence limit) dostaneme, že limita

$$\lim_{x\to-\infty} \sin(3x)$$

existuje. To už je (skoro) spor. Opět stačí použít zase větu o limitě složené funkce - vezmeme funkci $h(z) = \frac{1}{3}z$. Pak

$$\lim_{z\to-\infty} h(z) = -\infty$$

a funkce $h(z)$ je prostá, takže podle věty o limitě složené funkce existuje limita

$$\lim_{z\to-\infty} \sin(3h(z)) = \lim_{z\to-\infty} \sin z$$

což je spor s tím, co víme z přednášky.

Řešení 2:
Výraz přepíšeme podle jeho definice:

$$f(x) = \left(\frac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)^{x^2-x+3} = e^{(x^2-x+3)\ln\left(\frac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)}$$

Protože $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^2-3=\infty$, je výraz $\frac{2x^2-3}{2x^2+1}$ kladný na nějakém okolí ∞. Takže funkce f je definována na nějakém okolí ∞.

Nyní budeme hledat limitu $x\to\infty$ funkce

$$g(x) = (x^2-x+3)\ln\left(\frac{2x^2-3}{2x^2+1}\right) = \frac{-4(x^2-x+3)}{2x^2+1}\cdot\frac{\ln\left(1-\frac{4}{2x^2+1}\right)}{-\frac{4}{2x^2+1}} =$$

$$= \underbrace{\frac{-4(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2})}{2+\frac{1}{x^2}}}_{\to -2}\cdot\underbrace{\frac{\ln\left(1-\frac{4}{2x^2+1}\right)}{-\frac{4}{2x^2+1}}}_{\to 1}$$

kde jsme použili věty o aritmetice limit a větu o limitě složené funkce:

- $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}=1$
- $\lim\limits_{x\to\infty} -\frac{4}{2x^2+1}=0$
- vnitřní funkce $-\frac{4}{2x^2+1}$ se vyhne hodnotě 0 na nějakém prsten. okolí bodu ∞

Tedy $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-2$. A nakonec opět použijeme větu o limitě složené funkce $f(x)=e^{g(x)}$:

- $\lim\limits_{z\to -2} e^z = e^{-2}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -2$
- vnější funkce e^z je spojitá v bodě $z=-2$

Tedy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{g(x)} = e^{-2}$.