8.úkol z MA1 **12. 11. 2024**

Odevzdání úkolu: na přístím cvičení z MA1

1. Určete derivace funkce

$$f(x) = (x + \sin x)^{x+\sin x}$$

pro $x \in (0, \infty)$. Ověřte, že f je na intervalu $(0, \infty)$ skutečně definována.

2. S pomocí Leibnitzovy formule $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ určete $h^{(50)}(x)$ pro funkci $h(x) = x^2 \sin x$. (Zde $h^{(n)}(x)$ znamená n-tou derivaci funkce h v bodě x.)

3. Pomocí indukce ukažte, že $(x^n \ln x)^{(n)} = n! \cdot (\ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})$ pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $x > 0$.

(*Návod:* Pro indukční krok využijte toto: $(f)^{(n+1)}(x) = (f')^{(n)}(x)$, tj. nejdříve zderivujte $x^n \ln x$ a na to aplikujte teprve n-tou derivaci. Dále využijte, že n-tá derivace je lineární, tj. $(c \cdot f + g)^{(n)}(x) = c \cdot f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$, kde c je konstanta.)

Řešení 1:

Funkce $f(x)$ je dobře definovaná na $(0, \infty)$:

$$\text{pro } x > 1: \ x > 1 \geq -\sin x \ \Rightarrow \ x + \sin x > 0$$

$$\text{pro } 0 < x \leq 1: \ x > 0 > -\sin x \ \Rightarrow \ x + \sin x > 0$$

Máme

$$f(x) = e^{(x+\sin x)\ln(x+\sin x)}$$

a použitím základních vět o derivacích a derivaci složené funkce máme:

$$f'(x) = e^{(x+\sin x)\ln(x+\sin x)} \cdot \left((1+\cos x)\ln(x+\sin x) + (x+\sin x) \cdot \frac{1}{x+\sin x} \cdot (1+\cos x)\right) =$$

$$= (x+\sin x)^{(x+\sin x)}(1+\cos x)(1+\ln(x+\sin x))$$

Řešení 2:

Využijeme Leibnitzovu formuli pro $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sin x$. Pro $k \geq 3$ je $(x^2)^{(k)} = 0$ a tedy

$$h^{(50)}(x) = (x^2 \cdot \sin x)^{(50)} = x^2 \cdot (\sin x)^{(50)} + \binom{50}{1}(x^2)' \cdot (\sin x)^{(49)} + \binom{50}{2}(x^2)'' \cdot (\sin x)^{(48)} =$$

$$= -x^2 \sin x + 50 \cdot 2x \cos + 25 \cdot 49 \cdot 2 \sin x = (2450 - x^2)\sin x + 100x \cdot \cos x$$

protože

$$(\sin x)^{(k)} = \begin{cases} \sin x, & k \equiv 0 \mod 4 \\ \cos x, & k \equiv 1 \mod 4 \\ -\sin x, & k \equiv 2 \mod 4 \\ -\cos x, & k \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

Řešení 3:

Použijeme indukci podle n:

$n = 0$:

$$(x^0 \ln x)^{(0)} = \ln x$$

a současně

$$0! \cdot (\ln x + \sum_{k=1}^{0} \frac{1}{k}) = 1 \cdot (\ln x + 0) = \ln x$$

takže rovnost platí.

Indukční krok: Nechť tvrzení platí pro n. Pak

$$(x^{n+1}\ln x)^{(n+1)} = \left((x^{n+1}\ln x)'\right)^{(n)} = \left((n+1)x^n \ln x + \frac{x^{n+1}}{x}\right)^{(n)} =$$

$$= (n+1) \underbrace{(x^n \ln x)^{(n)}}_{\text{ind. předpoklad}} + \underbrace{(x^n)^{(n)}}_{n!} = (n+1) \cdot n! \cdot \left(\ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) + n! = (n+1)! \cdot \left(\ln x + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n+1}\right)$$

což jsme chtěli ukázat.