

úloha 1

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ (nebylo třeba řešit)

$$f(x) = \frac{x + 2 \sin(x^2 - 16) - 4}{x + \operatorname{arctg}(x^2 - 4x) - 4} = \frac{1 + \frac{2 \sin(x^2 - 16)}{x - 4}}{1 + \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - 4x)}{x - 4}}$$

$$= \frac{1 + 2(x+4) \frac{\sin(x^2 - 16)}{x^2 - 16} \xrightarrow{x \rightarrow 4} 1}{1 + x \cdot \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - 4x)}{x^2 - 4x} \xrightarrow{x \rightarrow 4} 1} \xrightarrow{x \rightarrow 4} \frac{17}{5}$$

AL

Zdůvodnění:

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x^2 - 16 \xrightarrow{x \rightarrow 4} 0 \\ h(y) = \frac{\sin y}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1 \\ \forall x \in P(4, 8): g(x) \neq 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{LSF(ii)}} (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x^2 - 4x \xrightarrow{x \rightarrow 4} 0 \\ h(y) = \frac{\operatorname{arctg} y}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \\ \forall x \in P(4, 4): g(x) \neq 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{LSF(ii)}} (2)$$

Alternativa - l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 2 \sin(x^2 - 16) - 4}{x + \operatorname{arctg}(x^2 - 4x) - 4} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 + 4x \cos(x^2 - 16)}{1 + \frac{2x - 4}{1 + (x^2 - 4x)^2}} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{17}{5}$$

AL

Zdůvodnění (*): $\left. \begin{array}{l} x^2 - 16 \xrightarrow{x \rightarrow 4} 0 \\ \sin y \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \\ \sin \text{ spojitý} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{LSF(i)}} (*)$, ostatní analogicky

$$f(x) = \frac{1 + 2 \frac{\sin(x^2 - 16)}{x - 4}}{1 + \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - 4x)}{x - 4}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$$

AL

Zdůvodnění:

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}: |\sin(x^2 - 16)| \leq 1 \\ (x - 4)^{-1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}: |\operatorname{arctg}(x^2 - 4x)| \leq \frac{\pi}{2} \\ (x - 4)^{-1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (4)$$

úloha 2

$$g(x) = (x + \cos(2x-6))^{\frac{1}{2}}, \quad D(f) \supset U(3,1) \text{ (např.)}$$

$$\forall x \in U(3,1):$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} (x + \cos(2x-6))^{-\frac{1}{2}} (1 - 2 \sin(2x-6)),$$

$$g''(x) = -\frac{1}{4} (x + \cos(2x-6))^{-\frac{3}{2}} (1 - 2 \sin(2x-6))^2 - 2 (x + \cos(2x-6))^{-\frac{1}{2}} \cos(2x-6).$$

$$g(3) = 2, \quad g'(3) = \frac{1}{4}, \quad g''(3) = -\frac{1}{32} - 1 = -\frac{33}{32}$$

$$(T_{3,2}g)(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) - \frac{33}{64}(x-3)^2$$

$$\text{Rovnice tečny: } y = 2 + \frac{1}{4}(x-3)$$

$$\text{Rovnice normály: } y = 2 - 4(x-3)$$

úloha 3

1) **Ano**, todo je Bolzanova - Weierstrassova věta.

2) **ne**, protipříklad: $f(x) = 4 + \cos \frac{1}{x}$, $x_n = \frac{1}{2\pi n}$.

(Pro Heineho by bylo nutné, aby $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 5$ pro každou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ splňující $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.)

3) **ne**, protipříklad: $g(x) = \begin{cases} 0, & x = [1, 2); \\ 1, & x = [2, 4]. \end{cases}$

(Ve tvzení ale platí opačná implikace, viz V 5.5.)

4) **Ano**, $\forall x \in \mathbb{R}: 0 < (\arctan(h(x)))' = \underbrace{\frac{1}{1+h^2(x)}}_{>0} \cdot h'(x)$, tedy

$\forall x \in \mathbb{R}: h'(x) < 0$ a použití V 6.34.

5) **Ano**, spojitá funkce na $\mathbb{R}$ by musela nabývat mezi-hodnot, viz V 5.6, D 5.8.

KOMENTÁŘ:

- Řešení 1. části ú1 l'Hospitalem bylo velmi snadné. Pokud jste při něm nijak nekomunikovali, proč čítele i jmenovatel původního výrazu konvergují k nule, odečetl jsem bod. Ten nebyl stržen, pokud jste vysvětlili následnou limitu kosinu pomocí VLSF, což vyžaduje analogický postup.

- úloha 1 by do zkoušky byla příliš snadná. Přímocárému použití l'Hospitala se da' kamžit např. touto modifikací:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)^{42} + 2 \sin^{42}(x^2 - 16)}{(x-4)^{42} + \operatorname{arctg}^{42}(x^2 - 4x)} = ?$$

V tomto případě ale stále funguje postup bez l'H uvedený výše.

- Taylorův polynom nerozlišuje. není to chyba, ale není to ani zvykem.