

3. cvičení z Matematické analýzy 1

9. - 13. října 2023

Úloha 1. Rozhodněte, zda funkce f daná uvedeným předpisem je omezená na zadaných množinách A, B, C . Dokažte správnost odpovědi pomocí vhodného odhadu.

(a) $f(x) = x \sin(x + 5)$ $A = D(f)$; $B = (-100, 100)$; $C = (1, R)$, $R > 0$.

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ $A = D(f)$; $B = (3, \infty)$; $C = (-2 + \varepsilon, 2 - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

(c) $f(x) = \frac{\cos x}{x - 1}$ $A = (0, 1)$; $B = (0, 1 - \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$; $C = (-\infty, 0)$

Úloha 2. Uvažujte funkci f zadanou předpisem níže. K zadané dvojici $a, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a zadanému $\varepsilon > 0$ najděte $\delta > 0$ takové, aby platilo

$$\forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$; $a = \infty$; $L = 0$.

(b) $f(x) = (2x - 4) \sin \frac{1}{x - 2}$; $a = 2$; $L = 0$.

(c) $f(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$; $a = -2$; $L = \infty$.

(d) $f(x) = \sqrt{x + 1} + \cos(e^{\operatorname{arctg} x} - x^{15} + |3x - \sin e^{-x}|)$; $a = \infty$; $L = \infty$.

Úloha 3. Určete maximální intervaly, na kterých jsou dané funkce rostoucí (resp. klesající). Maximální interval je takový, který nelze prodloužit tak, aby na novém intervalu měla funkce stále danou vlastnost.

(a) $f(x) = \sin(x^2)$,

(b) $f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right)$.

Úloha 4. Předpokládejte, že f, g jsou nezáporné funkce definované na \mathbb{R} . Doplňte následující tabulku (\uparrow = daná funkce je rostoucí, \downarrow = daná funkce je klesající, N = nelze obecně rozhodnout).

f	g	$f + g$	$f \cdot g$	$f \circ g$
\uparrow	\uparrow			
\uparrow	\downarrow			
\downarrow	\uparrow			
\downarrow	\downarrow			