3.úkol z MA1 **10. 10. 2023**

Odevzdání úkolu: na přístím cvičení z MA1

1. Nechť M je neprázdná podmnožina množiny kladných reálných čísel. Ukažte, že platí

$$\inf\{\tfrac{1}{x} \mid x \in M\} = \frac{1}{\sup\{x \mid x \in M\}}$$

Nebo také ekvivalentně: Pro $k \in [0, +\infty)$ platí, že:

$$k = \inf\{\tfrac{1}{x} \mid x \in M\} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{k} = \sup\{x \mid x \in M\}$$

V rámci tohoto příkladu uvažujeme tyto formální rovnosti $0 = \frac{1}{+\infty}$ a $+\infty = \frac{1}{0}$.

2. Mějme reálnou funkci $f(x) = \frac{x^2-x}{2x^2+1}$. Pro každé $\varepsilon > 0$ najděte nějaké $\delta > 0$ tak, aby

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \delta < x \;\Rightarrow |f(x) - \tfrac{1}{2}| < \varepsilon$$

(Hledáme tedy konkrétní δ v závislosti na zvoleném ε.) Pro zdůvodnění použijte vhodné odhady. (Ukazujeme vlastně, že $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.)

Návod pro Úlohu 2: Výraz $f(x) - \frac{1}{2}$ vyjádřete jako zlomek a pro odhad využijte nerovnosti $2x + 1 \leq 2x + 2x$ a $2x^2 + 1 \geq 2x^2$ pro $x > 1$.

1.Úloha - Řešení:

Část $\Rightarrow$:

Nechť pro $k \in [0, +\infty)$ platí, že $k = \inf\{\frac{1}{x} \mid x \in M\}$. Pak je

(1) $k \leq \frac{1}{x}$ pro všechna $x \in M$;

(2) pro každé $\ell \in \mathbb{R}$ takové, že $k < \ell$ existuje $y \in M$, že $k \leq \frac{1}{y} < \ell$.

Nechť je nejdříve $k = 0$. Chceme ukázat, že $\sup\{x \mid x \in M\} = +\infty$, tedy, ze množina M není shora omezená. Zvolme $L > 0$, pak (pro $\ell = \frac{1}{L}$) z (2) existuje $y \in M$, že $\frac{1}{y} < \frac{1}{L}$. Tedy $L < y$ a tím jsme neomezenost M shora prokázali.

Nechť je nyní $k > 0$. Pak z (1) platí, že $x \leq \frac{1}{k}$ pro všechna $x \in M$ (tedy první požadavek pro to, aby $\frac{1}{k}$ bylo supremum M). Mějme nyní $L > 0$ takové, že $L < \frac{1}{k}$. Pak je $k < \frac{1}{L}$ a (2) existuje $y \in M$, že $k \leq \frac{1}{y} < \frac{1}{L}$. Tedy $L < y \leq \frac{1}{k}$ (což je druhý požadavek pro to, aby $\frac{1}{k}$ bylo supremum M). Tím máme hotovou část $\Rightarrow$.

U druhé časti $\Leftarrow$ by se dalo říct, že se udělá obdobně (pokud už skutečně podstatě důkazu rozumíme). Pokud mu ale ještě tak docela nerozumíme, vypíšeme si ho:

Nechť pro $k \in [0, +\infty)$ platí, že $\frac{1}{k} = \sup\{x \mid x \in M\}$. Pokud je $k = 0$, znamená zápis, že M není shora omezená a pro $k > 0$ to znamená, že:

(1) $x \leq \frac{1}{k}$ pro všechna $x \in M$;

(2) pro každé $0 < \ell$ (bez újmy na obecnosti) takové, že $\ell < \frac{1}{k}$ existuje $y \in M$, že $\ell < y \leq \frac{1}{k}$.

Nechť je nejdříve $k = 0$. Chceme ukázat, že $\inf\{\frac{1}{x} \mid x \in M\} = 0$. Zřejmě je $0 \leq \frac{1}{x}$ pro všechna $x \in M$, protože M je podmnožinou kladných čísel (tedy první požadavek pro infimum rovno 0). Zvolme $L > 0$. Protože M není shora omezená, existuje $y \in M$, že $\frac{1}{L} < y$ tedy $0 \leq \frac{1}{y} < L$ (druhý požadavek pro infimum rovno 0).

Nechť je nyní $k > 0$. Chceme ukázat, že $\inf\{\frac{1}{x} \mid x \in M\} = k$. Z (1) platí, že $k \leq \frac{1}{x}$ pro všechna $x \in M$ (tedy první požadavek pro infimum rovno k). Mějme nyní (opět bez újmy na obecnosti) $L > 0$ takové, že $k < L$. Pak je $\frac{1}{L} < \frac{1}{k}$ a (pro $\ell = \frac{1}{L}$) z (2) existuje $y \in M$, ze $\frac{1}{L} = \ell < y \leq \frac{1}{k}$. Tedy $k \leq \frac{1}{y} < L$ (což je druhý požadavek pro infimum rovno k). Tím máme hotovou část $\Leftarrow$ a tím i celý důkaz.

2.Úloha - Řešení:

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x^2 - x}{2x^2 + 1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2x^2 - 2x - 2x^2 - 1}{2(2x^2 + 1)}\right| = \left|\frac{2x + 1}{2(2x^2 + 1)}\right|$$

Abychom mohli najít mez δ, za kterou bude zlomek menší než dané ε, zjednodušíme si ho dalším odhadem. K tomu můžeme použít tyto nerovnosti pro $x > 1$: $2x + 1 \leq 2x + 2x$ a $2x^2 + 1 \geq 2x^2$. (Ve skutečnosti stačí vzít už $x \geq \frac{1}{2}$, ale jelikož nám jde o okolí $+\infty$, tak na takovémto detailu nezáleží, a pro jednoduchost si prostě vezmeme $x > 1$.)

Tedy pro $x > 1$ je

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \dots = \frac{2x + 1}{2(2x^2 + 1)} \leq \frac{2x + 2x}{2 \cdot 2x^2} = \frac{1}{x}$$

Jestliže nyní chceme splnit $\frac{1}{x} < \varepsilon$ znamená to $\frac{1}{\varepsilon} < x$ a stačí položit $\delta = \max\{\frac{1}{\varepsilon}, 1\}$ (to abychom měli zajištěnu i nerovnost $x > 1$).

Pak dostaneme:

$$\max\left\{\frac{1}{\varepsilon}, 1\right\} = \delta < x \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\varepsilon} < x \wedge 1 < x\right) \quad \Rightarrow \quad \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \dots \leq \frac{1}{x} < \varepsilon$$