4.úkol z MA1 **17. 10. 2023**

Odevzdání úkolu: na přístím cvičení z MA1

Vyšetřete limity:

(a)

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{18x^3 - 3x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 2x - 1}$$

(b)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2}$$

Návod: (a) Jestliže má polynom $f(x) = a^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ kořen x_0, tj. $f(x_0) = 0$, lze ho napsat jako $f(x) = (x - x_0)g(x)$ pro nějaký polynom $g(x)$. Polynom $g(x)$ získáme buď dělením polynomů nebo pomocí vzorce

$$x^k - x_0^k = (x - x_0) \cdot (x^{k-1} + x^{k-2}x_0 + \cdots + xx_0^{k-2} + x_0^{k-1})$$

který použijeme pro $f(x) = f(x) - 0 = f(x) - f(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x_0^k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x^k - x_0^k)$.

Tedy z obou polynomů ve zlomku vytkněte příslušný výraz, který zkraťte. Dále už můžete postupovat s pomocí vět z přednášky o artimetice limit.

(b) Zlomek rozšiřte vhodným výrazem. Využijte identitu $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

(c) Zkuste si funkci načrnout.

Řešení (a):

Polynom $3x^2+2x-1$ je nulový maximálně ve dvou bodech a a b (každý polynom stupně n má nejvýše n kořenů), tedy definiční obor funkce $f(x)=\frac{18x^3-3x^2-4x+1}{3x^2+2x-1}$ je $D(f)=\mathbb{R}\setminus$ "konečná množina". A proto je funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $\frac{1}{3}$.

V bodě $\frac{1}{3}$ se čitatel i jmenovatel vynuluje, je to tedy typ limity $\frac{0}{0}$. Oba polynomy se tak dají vydělit společným polynomem $x-\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{rl} 18x^3-3x^2-4x+1: & (x-\frac{1}{3})=18x^2+3x-3 \\ -18x^3+6x^2 \\ \hline 3x^2-4x \\ -3x^2+x \\ \hline -3x+1 \\ 3x-1 \\ \hline 0 \end{array}$$

U kvadratického polynomu můžeme druhý kořen uhádnout pomocí Viétových vzorců, tedy

$$3x^2+2x-1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+1)$$

Takže

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{18x^3-3x^2-4x+1}{3x^2+2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{(x-\frac{1}{3})(18x^2+3x-3)}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+1)}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{18x^2+3x-3}{3\,(x+1)}=\frac{18\cdot(\frac{1}{3})^2+3\cdot\frac{1}{3}-3}{3(\frac{1}{3}+1)}=0$$

Kde jsme použili věty o součinu, součtu a podílu limit a základní limitu $\lim\limits_{x\to a}x^n=a^n$ pro $a\in\mathbb{R}$ a $n\in\mathbb{N}$.

Řešení (b):

Definiční obor funkce $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$ je $D(f)=[-2,2)\cup(2,\infty)$ a funkce je tak v nějakém prstencovém okolí bodu 2 definována. V bodě 2 je to typ limity $\frac{0}{0}$. Zlomek rozšíříme vhodným výrazem (na tomto okolí).

$$\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2})^2-2^2}=\sqrt{x+2}+2\quad\xrightarrow{x\to 2}\quad\sqrt{2+2}+2=4$$

Kde jsme použili větu o součtu limit, základní limitu $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ pro $a>0$ a $\lim\limits_{x\to b}g(x+c)=\lim\limits_{x\to b+c}g(x)$ pro $b,c\in\mathbb{R}$ a funkci g.

Řešení (c):

Definiční obor funkce $f(x)=\frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2}$ je $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ a funkce je tak v nějakém prstencovém okolí bodu 0 definována. Protože hodnoty v čitateli blízko 0 stále kmitají a ve jmenovateli jdou k nule, můžeme tušit, že limita nebude existovat.

Ke zdůvodnění využijeme např. tzv. Heineovo větu, která říká, že pokud limita $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ existuje, pak pro každou posloupnost bodů $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathbb{R}\setminus\{a\}$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, musí mít $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ stále tutéž hodnotu.

Zvolíme si tedy např. takovou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathbb{R}\setminus\{0\}$, aby $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ a $\sin(\frac{1}{x_n})=0$, tedy $f(x_n)=0$. Například:

$$x_n = \frac{1}{2\pi n}$$

A takovou posloupnost $(y_n)_{n=1}^{\infty}\mathbb{R}\setminus\{0\}$, aby $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ a $\sin(\frac{1}{y_n}) = 1$, tedy $f(y_n) = \frac{1}{y_n^2}$. Například:

$$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

Pak máme

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

zatímco

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} (\frac{\pi}{2} + 2\pi n)^2 = \infty$$

což jsou dvě různé limity a proto původní limita neexistuje.

Můžeme také použít tzv. Cauchy-Bolzanovu podmínku, která říká, že pokud limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje a je konečná, pak

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R} \quad x, y \in P(a, \delta) \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Stačí tedy ukázat, že platí negace této podmínky:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in \mathbb{R} \quad x, y \in P(a, \delta) \ \wedge \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Budeme postupovat velmi podobně, tj. pro $\delta > 0$ zvolíme x a y tak, aby $0 < |x| < \delta$ a $0 < |y| < \delta$ a přitom bylo $\sin(\frac{1}{x}) = 0$ a $\sin(\frac{1}{y}) = 1$, např.

- $x = \frac{1}{2\pi n}$, kde $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $n > \frac{1}{2\pi\delta}$,
- $y = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi m}$, kde $m \in \mathbb{N}$ je takové, že $m > \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{\delta} - \frac{\pi}{2})$.

Hodnotu ε teprve potřebujeme najít v dalším výpočtu. Máme

$$|f(x) - f(y)| = \left|0 - \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right)^2\right| = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right)^2 \geq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

Takže můžeme zvolit $\varepsilon = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ a celé to bude fungovat, tedy konečná limita neexistuje.

V tomto případě by se ještě mělo zdůvodnit, že $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ není ani ∞ ani $-\infty$. Ale to plyne z toho, že v libovolném okolí $P(0, \delta)$ jsou body x, kde $f(x) = 0$ (ty už k dispozici máme).