5.úkol z MA1 **24. 10. 2023**

Odevzdání úkolu: na přístím cvičení z MA1

1. Vyšetřete limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x} + \operatorname{arctg}(\ln x)}{e^{2x-3} + 4}$$

2. Dokažte následující tvrzení:
Jsou-li funkce f, g definovány na některém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a

(i) f nemá v bodě a limitu a

(ii) g má v bodě a vlastní nenulovou limitu,

pak součin $f \cdot g$ nemá v bodě a limitu.

3. Ukažte, že tvrzení z úlohy **2** obecně neplatí, pokud limita g v a je nulová nebo nevlastní, tj. pro tyto případy najděte bod a a funkce f, g takové, že

- funkce f, g jsou definovány na některém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a
- f nemá v bodě a limitu a
- g má v bodě a nulovou limitu nebo nevlastní limitu (tj. buď ∞ nebo $-\infty$),

a součin $f \cdot g$ v bodě a limitu má.

Návod: (1) Použijte věty z přednášky, zejména “větu o dvou policajtech”.

(2) Použijte to, že na nějakém prstencovém okolí a platí, že $f(x) = (f(x)g(x)) \cdot \frac{1}{g(x)}$ a využijte věty o aritmetice limit.

Řešení (1):
Výraz je definován na nějakém prstencovém okolí bodu ∞. Vytkneme člen, ktery roste (nej)rychleji:

$$\frac{e^{2x}+\operatorname{arctg}(\ln x)}{e^{2x-3}+4}=\frac{e^{2x}(1+\frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{e^{2x}})}{e^{2x}(e^{-3}+\frac{4}{e^{2x}})}\quad\overset{x\to\infty}{\longrightarrow}\quad\frac{1+0}{e^{-3}+0}=e^{3}$$

Kde jsme použili věty o součtu a podílu limit, základní limitu $\lim_{y\to\infty}e^{-y}=0$ a odhad

$$\frac{-\frac{\pi}{2}}{e^{2x}}\leq\frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{e^{2x}}\leq\frac{\frac{\pi}{2}}{e^{2x}}$$

kde obě krajní limity jsou nulové a z věty "o dvou policajtech" je nulová i prostřední limita.

Řešení (2):
Budeme postupovat sporem: Předpokládejme, ze součin $f\cdot g$ v bodě a limitu má. Protože g má v a vlastní nenulovou limitu $0\neq c\in\mathbb{R}$, tak z její definice máme, že pro $\varepsilon=\frac{|c|}{2}$ existuje $\delta>0$, že pro všechna $x\in P(a,\delta)$ je

$$|c|-|g(x)|\leq|g(x)-c|<\varepsilon=\frac{|c|}{2}\ .$$

První nerovnost je z trojúhelníkové nerovnosti. Takže máme, že

$$0<\frac{|c|}{2}=|c|-\frac{|c|}{2}\leq|g(x)|$$

a funkce g je tedy nenulová na okolí $P(a,\delta)$. Na tomto okolí tedy můžeme psát, že

$$f(x)=(f(x)\cdot g(x))\cdot\frac{1}{g(x)}$$

. Protože limita $f\cdot g$ existuje a limita $\frac{1}{g}$ také existuje a je vlastní a nenulov8, tak i limita f existuje. To je ale spor s předpokladem, že f nemá v a limitu.

Dokázali jsme tedy, ze opak platí a $f\cdot g$ nemá v bodě a limitu nemá.

Řešení (3):
Pro $a\in\mathbb{R}$ si zvolíme např. $f(x)=2+\sin\left(\frac{1}{x-a}\right)$. Pak $\lim_{x\to a}f(x)$ neexistuje (viz např. přednáška). Druhou funkci si zvolíme např. jako $g(x)=|x-a|$ (pro nulovou limitu v a) nebo $g(x)=\frac{1}{|x-a|}$ (pro limitu ∞ v a) nebo $g(x)=-\frac{1}{|x-a|}$ (pro limitu $-\infty$ v a).

Protože pro všechna $x\in\mathbb{R}\setminus\{a\}$ je

$$1\leq f(x)\leq 3$$

tak

$$g(x)\leq f(x)g(x)\leq 3g(x)$$

v prvních dvou případech limit, kdy je $g(x)\geq 0$ a

$$g(x)\geq f(x)g(x)\geq 3g(x)$$

v posledním případě limity, kdy je $g(x)\leq 0$. Ve všech případech z věty o dvou policajtech máme, že $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}g(x)$ a tedy $f\cdot g$ limitu v a má.

Pro $a=\infty,-\infty$ budeme postupovat podobně a si zvolíme $f(x)=2+\sin x$. Pak $\lim_{x\to a}f(x)$ neexistuje (viz např. přednáška). Druhou funkci si zvolíme např. jako $g(x)=\frac{1}{|x|}$ (pro nulovou limitu v a) nebo $g(x)=|x|$ (pro limitu ∞ v a) nebo $g(x)=-|x|$ (pro limitu $-\infty$ v a).

Protože pro všechna $x\in\mathbb{R}\setminus\{a\}$ je

$$1\leq f(x)\leq 3$$

tak

$$g(x) \leq f(x)g(x) \leq 3g(x)$$

v prvních dvou případech limit, kdy je $g(x) \geq 0$ a

$$g(x) \geq f(x)g(x) \geq 3g(x)$$

v posledním případě limity, kdy je $g(x) \leq 0$. Ve všech případech z věty o dvou policajtech máme, že $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ a tedy $f \cdot g$ limitu v a má.