6.úkol z MA1 **31. 10. 2023**

Odevzdání úkolu: na přístím cvičení z MA1

1. Vyšetřete limitu:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+\sin(3x))}{3^{2x}-1}$$

2. Vyšetřete limitu:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2-3}{2x^2+1} \right)^{\frac{1}{x^2-2}}$$

Návod: (1) Použijte základní limity z přednášky o logaritmech, goniometrických a exponenciáních funkcích. Zlomek vhodně rozšiřte.

(2) Použijte definici vztahu $a^b = e^{b \ln(a)}$ pro $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$.

Řešení 1:

Protože $\lim\limits_{x\to 0} 1+\sin(3x) = 1$, je funkce $1+\sin(3x)$ kladnaá na nějakém prstencovém okolí P bodu 0 a tedy funkce $\ln(1+\sin(3x))$ je definována na tomto prstencovém okolí P bodu 0. Dále funkce $3^{2x}-1 = e^{2x\ln 3}-1$ je nulová právě jen pro $x=0$. Celkově tedy funkce v zadané limitě je definována na prstencovém okolí P bodu 0.

Limita je typu $\frac{0}{0}$. Využijeme základní limity a výraz příslušně rozšíříme:

$$\frac{\ln(1+\sin(3x))}{3^{2x}-1} = \underbrace{\frac{\ln(1+\sin(3x))}{\sin(3x)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{3x}{2x\ln 3}}_{=\frac{3}{2\ln 3}} \cdot \underbrace{\frac{2x\ln 3}{e^{2x\ln 3}-1}}_{\to 1}$$

kde jsme použili větu o limitě složené funkce v těchto případech (z nichž bude také vidět, že jsme rozšiřovali nenulovými výrazy):

1.
   - $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1$
   - $\lim\limits_{x\to 0} \sin(3x) = 0$
   - vnitřní funkce $\sin(3x)$ se vyhne hodnotě $z=0$ na nějakém prsten. okolí bodu $x=0$
2.
   - $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$
   - $\lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$
   - vnitřní funkce $3x$ se vyhne hodnotě $z=0$ na nějakém prsten. okolí bodu $x=0$
3.
   - $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{e^z-1} = 1$
   - $\lim\limits_{x\to 0} 2x\ln 3 = 0$
   - vnitřní funkce $2x\ln 3$ se vyhne hodnotě $z=0$ na nějakém prsten. okolí bodu $x=0$

Podle vět o aritmetice limit tedy je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(3x))}{3^{2x}-1} = \frac{3}{2\ln 3}$$

Řešení 2:

Výraz přepíšeme podle jeho definice:

$$f(x) = \left(\frac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)^{\frac{1}{x^2-2}} = e^{\frac{1}{x^2-2}\ln\left(\frac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)}$$

Protože $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^2-3 = \infty$, je výraz $\frac{2x^2-3}{2x^2+1}$ kladný na nějakém okolí ∞. Podobně výraz x^2-2 je nenulový na nějakém okolí ∞. Takže funkce f je definována na nějakém okolí ∞.

Nyní budeme hledat limitu $x \to \infty$ funkce

$$g(x) = \underbrace{\frac{1}{x^2 - 2}}_{\to\infty} \ln \underbrace{\left(\frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 1} \right)}_{\to 1}$$

Je to limita typu $\frac{1}{\infty} \cdot 0$. Použijeme tedy věty o aritmetice limit a limitu složené funkce:

- $\lim\limits_{z \to 1} \ln z = 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{2} = 1$
- vnější funkce $\ln z$ je spojitá v bodě $z = 1$

Tedy $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \frac{1}{\infty} \cdot 0 = 0$. A nakonec opět použijeme větu o limitě složené funkce $f(x) = e^{g(x)}$:

- $\lim\limits_{z \to 0} e^z = e^0 = 1$
- $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$
- vnější funkce e^z je spojitá v bodě $z = 0$

Tedy $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} e^{g(x)} = 1$.