7.úkol z MA1 **7. 11. 2023**

Odevzdání úkolu: na přístím cvičení z MA1

1. Vyšetřete následující limitu. Výpočet náležitě zdůvodněte.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{3^{2n} + (-3)^{n+2}} - \sqrt{3^{2n} - \sin^n(n)}$$

2. Vyšetřete jednostrannou limitu v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$. Výpočet náležitě zdůvodněte.

$$\lim_{x\to -1_+} \frac{\sin\Big((x+1)^{\alpha^2} \cdot \ln^2(x+2)\Big)}{(x+1)^{3\alpha}}$$

3. Dokažte, že monotónní posloupnost je konvergentní, jestliže konverguje některá její podposloupnost.

Řešení 1:

Posloupnost je definována od nějakého n_0 výše, konkrétně: pro $n \geq 2$ je

$$3^{2n} \geq 3^{n+2} \geq -(-3)^{n+2} \ \Rightarrow 3^{2n} + (-3)^{n+2} \geq 0$$

$$3^{2n} \geq 1 \geq \sin^n(n) \ \Rightarrow 3^{2n} - \sin^n(n) \geq 0$$

Výraz rozšíříme standardním způsobem:

$$a_n = \sqrt{3^{2n} + (-3)^{n+2}} - \sqrt{3^{2n} - \sin^n(n)} = \frac{(-3)^{n+2} + \sin^n(n)}{\sqrt{3^{2n} + (-3)^{n+2}} + \sqrt{3^{2n} - \sin^n(n)}} =$$

$$= \frac{3^n \left(9(-1)^n + \frac{\sin^n(n)}{3^n}\right)}{3^n \left(\sqrt{1 + \frac{9(-1)^n}{3^n}} + \sqrt{1 - \frac{\sin^n(n)}{3^{2n}}}\right)} = \frac{9(-1)^n + \frac{\sin^n(n)}{3^n}}{\sqrt{1 + \frac{9(-1)^n}{3^n}} + \sqrt{1 - \frac{\sin^n(n)}{3^{2n}}}}$$

Pro sudá čísla je zřejmě $a_{2k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{9}{2}$ a pro lichá čísla je $a_{2k-1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{9}{2}$, takže pro nějaké vybrané podposloupnosti máme různé limity a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje.

Použili jsme věty o aritmetice limit a větu o dvou policajtech.

Řešení 2:

Funkce je definována na nějakém pravém prstencovém okolí -1, konkrétně na $(-1, \infty)$. Na tomto okolí můžeme výraz rozšířit:

$$f(x) = \frac{\sin\left((x+1)^{\alpha^2} \cdot \ln^2(x+2)\right)}{(x+1)^{3\alpha}} = \underbrace{\frac{\sin\left((x+1)^{\alpha^2} \cdot \ln^2(x+2)\right)}{(x+1)^{\alpha^2} \cdot \ln^2(x+2)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\ln^2(x+2)}{(x+1)^2}}_{\to 1} \cdot (x+1)^{\alpha^2 - 3\alpha + 2}$$

Zde jsme použili větu o limitě složené funkce v těchto případech:

1.
   - $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$
   - $\lim\limits_{x\to -1_+} (x+1)^{\alpha^2} \cdot \ln^2(x+2) = 0$ (to protože $\alpha^2 \geq 0$!)
   - vnitřní funkce $(x+1)^{\alpha^2} \cdot \ln^2(x+2)$ se vyhne hodnotě $z = 0$ na nějakém pravém prsten. okolí bodu $x = -1$
2.
   - $\lim\limits_{z\to 1} \frac{\ln(z)}{z-1} = 1$
   - $\lim\limits_{x\to -1_+} x + 2 = 1$
   - vnitřní funkce $x+2$ se vyhne hodnotě $z = 1$ na nějakém pravém prsten. okolí bodu $x = -1$

Z věty o aritmetiky limit (a věty o ekvivalenci existence limit - viz 5. úkol, úloha 2) máme:

$$\lim_{x\to -1_+} f(x) = \lim_{x\to -1_+} (x+1)^{\alpha^2-3\alpha+2} = \begin{cases} 0 & , \ \alpha \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ 1 & , \ \alpha \in \{1, 2\} \\ \infty & , \ \alpha \in (1, 2) \end{cases}$$

protože $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)(\alpha - 2)$.

Řešení 3:

Nechť posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je monotonní. Předpokládejme nejdříve, že je neklesající, tj. $a_n \le a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Nechť nějaká podposloupnost $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ konverguje, tj. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.

Ukážeme nejdříve, že $c \ge a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro spor předpokládejme, že existuje $n' \in \mathbb{N}$, že $a_{n'} \ge c + \varepsilon$ pro nějaké $\varepsilon > 0$. Z toho, že $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ je vybraná podposloupnost z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ máme nyní nějaké $k_0 \in \mathbb{N}$, že $n_{k_0} \ge n'$. Tedy pro všechna $k \ge k_0$ platí (díky neklesání), že

$$a_{n_k} \ge a_{n_{k_0}} \ge a_{n'} \ge c + \varepsilon$$

Aplikováním limity pro $k \to \infty$ na tuto nerovnost dostaneme

$$c = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \ge c + \varepsilon$$

což je spor.

Tedy platí, že $c \ge a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená shora (a díky tomu, že je nerostoucí, i zdola).

Nyní buď stačí využít větu, že omezená monotonní posloupnost je konvergentní nebo tuto větu dokázat tím, že ukážeme, že $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Tedy mějme $\varepsilon > 0$. Z existence limity posloupnosti $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ máme:

$$\exists k_1 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}: \ k \ge k_1 \ \Rightarrow \ |a_{n_k} - c| < \varepsilon$$

tedy máme

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ n \ge n_{k_1} \Rightarrow \ 0 \le c - a_n \le c - a_{n_{k_1}} < \varepsilon \ \Rightarrow \ |a_n - c| < \varepsilon$$

neboli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

Případ, kdy posloupnost bude nerostoucí, tj. $a_n \ge a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak stačí převést na předchozí volbu posloupnosti $b_n = -a_n$, která je neklesající.

Pak z předchozího dostaneme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-b_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, tedy také konvergenci.