

Odevzdání úkolu: na příštím cvičení z MA1

1. Určete derivace funkce

$$f(x) = (x + \sin x)^{x + \sin x}$$

pro $x \in (0, \infty)$.

2. S pomocí Leibnitzovy formule $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ určete $h^{(50)}(x)$ pro funkci $h(x) = x^2 \sin x$.

3. Pomocí indukce ukažte, že $(x^n \ln x)^{(n)} = n! \cdot (\ln x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k})$ pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $x > 0$.

Návod: (3) Pro indukční krok využijte toto: $(f)^{(n+1)}(x) = (f')^{(n)}(x)$, tj. nejdříve zderivujte $x^n \ln x$ a na to aplikujte teprve n -tou derivaci. Dále využijte, že n -tá derivace je lineární, tj. $(c \cdot f + g)^{(n)}(x) = c \cdot f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$, kde c je konstanta.

Řešení 1:

Funkce $f(x)$ je dobře definovaná na $(0, \infty)$:

$$\text{pro } x > 1 : x > 1 \geq -\sin x \Rightarrow x + \sin x > 0$$

$$\text{pro } 0 < x \leq 1 : x > 0 > -\sin x \Rightarrow x + \sin x > 0$$

Máme

$$f(x) = e^{(x+\sin x) \ln(x+\sin x)}$$

a použitím základních vět o derivacích a derivaci složené funkce máme:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{(x+\sin x) \ln(x+\sin x)} \cdot \left((1 + \cos x) \ln(x + \sin x) + (x + \sin x) \cdot \frac{1}{x + \sin x} \cdot (1 + \cos x) \right) = \\ &= (x + \sin x)^{(x+\sin x)} (1 + \cos x) (1 + \ln(x + \sin x)) \end{aligned}$$

Řešení 2:

Využijeme Leibnitzovu formuli pro $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sin x$. Pro $k \geq 3$ je $(x^2)^{(k)} = 0$ a tedy

$$\begin{aligned} h^{(50)}(x) &= (x^2 \cdot \sin x)^{(50)} = x^2 \cdot (\sin x)^{(50)} + \binom{50}{1} (x^2)' \cdot (\sin x)^{(49)} + \binom{50}{2} (x^2)'' \cdot (\sin x)^{(48)} = \\ &= -x^2 \sin x + 50 \cdot 2x \cos + 25 \cdot 49 \cdot 2 \sin x = (2450 - x^2) \sin x + 100x \cdot \cos x \end{aligned}$$

protože

$$(\sin x)^{(k)} = \begin{cases} \sin x, & k \equiv 0 \pmod{4} \\ \cos x, & k \equiv 1 \pmod{4} \\ -\sin x, & k \equiv 2 \pmod{4} \\ -\cos x, & k \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Řešení 3:

Použijeme indukci podle n :

$n = 0$:

$$(x^0 \ln x)^{(0)} = \ln x$$

a současně

$$0! \cdot (\ln x + \sum_{k=1}^0 \frac{1}{k}) = 1 \cdot (\ln x + 0) = \ln x$$

takže rovnost platí.

Indukční krok: Nechť tvrzení platí pro n . Pak

$$\begin{aligned} (x^{n+1} \ln x)^{(n+1)} &= ((x^{n+1} \ln x)')^{(n)} = \left((n+1)x^n \ln x + \frac{x^{n+1}}{x} \right)^{(n)} = \\ &= (n+1) \underbrace{(x^n \ln x)^{(n)}}_{\text{ind. předpoklad}} + \underbrace{(x^n)^{(n)}}_{n!} = (n+1) \cdot n! \cdot \left(\ln x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) + n! = (n+1)! \cdot \left(\ln x + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat.