9.úkol z MA1 **21. 11. 2023**

Odevzdání úkolu: na přístím cvičení z MA1

1. Vyšetřete následující limitu. Výpočet náležitě zdůvodněte.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{arctg} x}-\frac{1}{x}\right)$$

2. Pro funkci $f(x)=x^x$ určete Taylorův polynom funkce f řádu 2 v bodě $x_0=1$.

3. Najděte všechny tečny grafu funkce $f(x)=2x^2-1$ procházející bodem $(2,3)$.

Návod: (1) Výraz nejprve převeďte na společný jmenovatel. Nyní se nabízí použít L'Hospitalovo pravidlo - to by ale další výpočet v této chvíli zkomplikovalo, protože by při derivaci jmenovatele zůstala opět funkce arctg v součinu s další funkcí. Proto výraz rozšíříme $\frac{x}{x}$, čímž vznikne $\frac{x}{\mathrm{arctg} x}$, který už umíme vyšetřit. Pro zbylý výraz použijeme L'Hospitala.

(2) Připomeňte si vzorec pro Taylorův polynom.

(3) Použijte obecný vzorec pro tečnu v bodě x_0, do které dosadíte bod $(2,3)$. Tím dostanete rovnici pro x_0, kterou vyřešte.

Řešení 1:

Funkce $f(x) = \frac{1}{\mathrm{arctg} x} - \frac{1}{x}$ je dobře definovaná na prstencovém okolí $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ bodu 0.

Výraz nejprve převedeme na společný jmenovatel a upravíme.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\mathrm{arctg} x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \mathrm{arctg} x}{x \cdot \mathrm{arctg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \mathrm{arctg} x}{x^2} \cdot \underbrace{\frac{x}{\mathrm{arctg} x}}_{\to 1} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x - \mathrm{arctg} x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2(1+x^2)} = 0$$

Použili jsme L'Hospitalovo pravidlo na výraz typu $\frac{0}{0}$, kde limita podílu derivací existuje. V mezivýsledku jsme použili jednu ze základních limit $\frac{\mathrm{arctg} x}{x}$.

Řešení 2:

Taylorův polynom T_2 řádu 2 v x_0 pro f je

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2$$

Tedy pro $x > 0$ je

$$f'(x) = \left(e^{x \ln x} \right)' = e^{x \ln x}(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = e^{x \ln x}(1 + \ln x)$$

a

$$f''(x) = \left(e^{x \ln x}(1 + \ln x) \right)' = e^{x \ln x}(1 + \ln x)^2 + \frac{e^{x \ln x}}{x}$$

a pro $x_0 = 1$ máme tak $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$ a $f''(1) = 2$. Celkem tak je

$$T_2(x) = 1 + (x - 1) + (x - 1)^2$$

Řešení 3:

Tečna v obecném bodě funkce f v bodě x_0 (za předpokladu existence $f'(x_0)$) má rovnici

- $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, pokud $f'(x_0) \in \mathbb{R}$,
- $x = x_0$ pokud $f'(x_0) = \infty$ nebo $f'(x_0) = -\infty$.

Pro funkci $f(x) = 2x^2 - 1$ máme první případ vždy, tedy tečna v x_0 je

$$y = 4x_0(x - x_0) + 2x_0^2 - 1 = 4x_0 x - 2x_0^2 - 1$$

Má procházet bodem $(2, 3)$, tedy

$$3 = 4x_0 \cdot 2 - 2x_0^2 - 1$$

neboli

$$2x_0^2 - 8x_0 + 4 = 0$$
$$x_0^2 - 4x_0 + 2 = 0$$

a proto $x_0 = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$ a tečny jsou

$$y = (8 + 4\sqrt{2})x - 13 - 8\sqrt{2}$$
$$y = (8 - 4\sqrt{2})x - 13 + 8\sqrt{2}\ .$$