1. cvičení z Matematiky 2

16.-20. února 2015

1.1 (a) Pro jaké vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ v euklidovském prostoru platí $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||$ (neboli, kdy nastává rovnost v *Cauchy-Schwartzově nerovnosti* $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||$)?

(b) Pro jaké vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ v euklidovském prostoru platí $||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$ (neboli, kdy nastává rovnost v *trojúhelníkové nerovnosti* $||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$)?

Řešení:

(a) Z vlastnosti úhlu α (nenulových) vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ je $\cos\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||}$ tedy uvažovaná rovnost nastává právě když $\alpha \in \{0, \pi\}$ neboli když jsou vektory lineárně závislé. (V případě nulového vektoru to platí také.)

Konkrétní důkaz: Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé, tedy (BÚNO) $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |(\lambda\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}| = |\lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})| = |\lambda| \cdot |\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{v}|| = ||\lambda\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||.$$

Pro opačnou implikaci uvažujme funkci $f(t) := ||t \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 \geq 0$ pro $t \in \mathbb{R}$. Máme

$$f(t) = ||t \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = (t \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (t \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}) = t^2||\mathbf{u}||^2 + 2t \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + ||\mathbf{v}||^2.$$

Pokud je nyní $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ pak $||\mathbf{u}|| \neq 0$ a f je nezáporný polynom stupně 2. Jeho diskriminant musí tedy být nekladný, proto $0 \geq (2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - 4||\mathbf{u}||^2 \cdot ||\mathbf{v}||^2$ (čímž dostáváme Cauchy-Schwartzovu nerovnost). Předpokládáme-li, že $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||$, pak diskriminant je nulový, tedy f má nějaký kořen $t_0 \in \mathbb{R}$. Tedy $0 = f(t_0) = ||t_0 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}||^2$ a proto $t_0 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, takže $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé.

(b) Ekvivalentními úpravami rovnosti dostaneme

$$||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = (||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||)^2$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||^2 + 2\ ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{v}||^2$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||.$$

Tedy podle (a) musí být vektory lineárně závislé a po dosazení příslušné závislosti do původní rovnosti zjistíme, že vektory musí (v případě nenulovosti) mít stejný směr. To lze také názorně odvodit z obrázku představující délky součtu vektorů.

1.2 Na základě trojúhelníkové nerovnosti stanovte horní odhad pro vzdálenost dvou bodů $x, y \in \mathbb{R}^3$, nachází-li se x nejvýše ve vzdálenosti 2 od bodu $x_0 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ a y ve vzdálenosti nejvýše 9 od bodu $y_0 = (100, 50, 50) \in \mathbb{R}^3$.

Řešení:

Použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$||x - y|| = ||(x - x_0) + (x_0 - y_0) + (y_0 - y)|| \leq ||x - x_0|| + ||x_0 - y_0|| + ||y_0 - y||.$$

Protože $||x - x_0|| \leq 2$, $||y_0 - y|| \leq 9$ a $||x_0 - y_0|| = \sqrt{(100-1)^2 + (50-1)^2 + (50-1)^2} = \sqrt{14603} \doteq 120.85$ dostaneme $||x - y|| \leq 2 + 120.85 + 9 = 131.85$.

1.3 Průměr (diametr) množiny M je číslo definované

$$\mathrm{diam}(M) := \sup\{||x-y|| \mid x, y \in M\}.$$

Stanovte průměr množin
(a) $M = \{8\} \subseteq \mathbb{R}$,
(b) $M = \langle 0,1\rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$,
(c) $M = \langle 0,1\rangle^n \subseteq \mathbb{R}^n$.

Řešení:
(a) $\mathrm{diam}(M) = 0$; (b) $\mathrm{diam}(M) = \sqrt{3}$; (c) $\mathrm{diam}(M) = \sup\{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2} \mid a_i, b_i \in \langle 0,1\rangle\} = \sqrt{n}$.

1.4 Určete vnitřek, hranici a uzávěr následujících množin:
(a) $M = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 \leq 3, a^2 - 4a + b^2 \leq 0\}$;
(b) $M = \mathbb{Q}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všech racionálních čísel.

Řešení:
(a) Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec můžeme první nerovnost upravit na $(a+1)^2 + b^2 \leq 4$ neboli $||(a,b) - (-1,0)||^2 \leq 4$. Podobně druhá nerovnost znamená $||(a,b) - (2,0)||^2 \leq 4$. Množinu M proto můžeme vyjádřit jako

$$M = A \cap B \quad \text{, kde} \quad A = \overline{U}_2(-1,0) \quad \text{a} \quad B = \overline{U}_2(2,0),$$

tedy jako průnik dvou uzavřených koulí (viz dále). Pro $\varepsilon > 0$ a $x_0 \in \mathbb{R}^2$ používáme značení

$$\overline{U}_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x - x_0|| \leq \varepsilon\}$$

a

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x - x_0|| < \varepsilon\}.$$

Množina $U_\varepsilon(x_0)$ je otevřená (protože pro $x \in U_\varepsilon(x_0)$ a $\delta' := \varepsilon - ||x - x_0||$ je díky trojúhelníkové nerovnosti $U_{\delta'}(x) \subseteq U_\varepsilon(x_0)$).

Dále je $\overline{U}_\varepsilon(x_0)$ uzávěrem množiny $U_\varepsilon(x_0)$ (tedy $\overline{U_\varepsilon(x_0)} = \overline{U}_\varepsilon(x_0)$):
$\subseteq$: Pro $x \in \overline{U_\varepsilon(x_0)}$ a libovolné $\delta > 0$ existuje $y \in U_\varepsilon(x_0) \cap U_\delta(x)$. Tedy $||x - x_0|| \leq ||x-y|| + ||y - x_0|| < \varepsilon + \delta$. Protože δ bylo libovolné, máme $||x - x_0|| \leq \varepsilon$, tj. $x \in \overline{U}_\varepsilon(x_0)$.
$\supseteq$: Pro $x \in \overline{U}_\varepsilon(x_0)$ a $0 < \delta < \varepsilon$ je $x - \frac{\delta}{2\varepsilon}(x - x_0) \in U_\varepsilon(x_0) \cap U_\delta(x)$. Tedy $x \in \overline{U_\varepsilon(x_0)}$.

A konečně je $U_\varepsilon(x_0)$ vnitřkem množiny $\overline{U}_\varepsilon(x_0)$ (tedy $\big(\overline{U}_\varepsilon(x_0)\big)^\circ = U_\varepsilon(x_0)$):
$\subseteq$: Pokud $||x - x_0|| = \varepsilon$ a $0 < \delta < \varepsilon$, pak $x + \frac{\delta}{2\varepsilon}(x - x_0) \in U_\delta(x)$, ale $x + \frac{\delta}{2\varepsilon}(x - x_0) \notin U_\varepsilon(x_0)$. Tedy $x \notin \big(\overline{U}_\varepsilon(x_0)\big)^\circ$.
$\supseteq$: Plyne ihned z otevřenosti $U_\varepsilon(x_0)$.

Uzávěr M: Nyní víme, že obě množiny A i B jsou uzávěry nějakých množin, tedy jsou uzavřené. Množina M je jejich průnikem, tedy je také uzavřená a proto je uzávěrem sama sebe (neboli $\overline{M} = M$).

Vnitřek M: Použijeme vztah $M^\circ = (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. Protože $A^\circ = \big(\overline{U}_2(-1,0)\big)^\circ = U_2(-1,0))$ a podobně pro B, dostáváme

$$M^\circ = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 < 3, a^2 - 4a + b^2 < 0\}.$$

Hranice M:

$$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ =$$

$$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a^2+2a+b^2 = 3 \ \& \ a^2-4a+b^2 \leq 0) \vee (a^2+2a+b^2 \leq 3 \ \& \ a^2-4a+b^2 = 0)\}.$$

Poznámka: Nechť $f : D \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak množina $f^{-1}(-\infty, 0) = \{a \in D \mid f(a) < 0\}$ je otevřená množina v rámci množiny D - tedy $f^{-1}(-\infty, 0) = D \cap G$ pro nějakou otevřenou množinu G. Podobně $f^{-1}(-\infty, 0\rangle = \{a \in D \mid f(a) \leq 0\}$ je uzavřená v rámci množiny D - tedy $f^{-1}(-\infty, 0\rangle = D \cap U$ pro nějakou uzavřenou množinu U.

Protože funkce $f(a,b) = a^2+2a+b^2-3$ a $g(a,b) = a^2-4a+b^2$ jsou spojité na celém $\mathbb{R}^2$. Tedy množina

$$M = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+2a+b^2 \leq 3, a^2-4a+b^2 \leq 0\}$$

je uzavřená (neboli $\overline{M} = M$).

Dále množina

$$N = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+2a+b^2 < 3, a^2-4a+b^2 < 0\}$$

je uzavřená (neboli $N^\circ = N$).

Takto však dostáváme obecně pouze $N \subseteq M^\circ$. Pro rovnost je potřeba použít větu o implicitní funkci.

Pozor: Rovnost nemusí obecně nastat např. pro $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 \leq 0\}$ je

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 < 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subsetneq \mathbb{R} = A^\circ.$$

(b) Uvědomíme si, že v libovolném okolí libovolného $r \in \mathbb{R}$ leží jak nějaké racionální číslo, tak také nějaké iracionální číslo. Dále pokud máme $|r_i - s_i| < \varepsilon$ pro $i = 1,2,3$ (kde $r_i, s_i \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$) pak $||(r_1,r_2,r_3) - (s_1,s_2,s_3)|| \leq \sqrt{3} \cdot \varepsilon$. Speciálně tedy v libovolném okolí bodu $x \in \mathbb{R}^3$ leží jak nějaký prvek z $\mathbb{Q}^3$, tak nějaký prvek z $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$. Proto můžeme ihned napsat, že

$$\overline{\mathbb{Q}^3} = \mathbb{R}^3, \quad (\mathbb{Q}^3)^\circ = \emptyset \ \text{ a } \ \partial\mathbb{Q}^3 = \overline{\mathbb{Q}^3} \setminus (\mathbb{Q}^3)^\circ = \mathbb{R}^3.$$