10. cvičení z Matematiky 2

20. dubna - 24. dubna 2015

10.1 Vypočítejte integrál

$$\int\int_E \frac{y}{x} e^{xy}\ dS$$

pro množinu E v prvním kvadrantu omezenou křivkami $xy = 2$, $xy = 4$, $y = 2x$ a $y = \frac{x}{2}$.

Řešení:
Oblast integrace je

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \ \&\ \frac{x}{2} \le y \le 2x \ \&\ \frac{2}{x} \le y \le \frac{4}{x}\} =$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \ \&\ \frac{1}{2} \le \frac{y}{x} \le 2 \ \&\ 2 \le xy \le 4\}.$$

Vzhledem ke tvaru oblasti i funkce bude výhodné zavést nové souřadnice

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{a} \quad v = xy$$

(které odpovídají přímkám procházející počátkem a hyperbolám). Předpis pro nové proměnné ale odpovídá předpokládané inverzi zobrazení Φ, které použijeme pro substituci do našeho integrálu. Měli bychom tedy ještě ověřit, jestli toto zobrazení Φ vůbec existuje a jestli je prosté - vyjádříme tudíž proměnné x a y pomocí proměnných u a v a dostaneme tak (za předpokladu, že $x, y > 0$)

$$x = \sqrt{\frac{v}{u}} \quad \text{a} \quad y = \sqrt{uv}.$$

Definujeme si tedy zobrazení

$$\Phi : (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \Phi(u, v) = \left(\sqrt{\frac{v}{u}}, \sqrt{uv}\right)$$

jehož inverze je

$$\Phi^{-1} : (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \Phi^{-1}(x, y) = \left(\frac{y}{x}, xy\right).$$

Determinant Φ' se snadněji spočítá pomocí inverzního zobrazení (kde se nevyskytují odmocniny):

$$(\Phi^{-1})' = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix}, \qquad \det(\Phi^{-1})' = -2\frac{y}{x}$$

a tedy

$$\det \Phi'_{|(u,v)} = \frac{1}{\det(\Phi^{-1})'}_{|\Phi(u,v)} = -\frac{1}{2u}.$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \le u \le 2 \ \&\ 2 \le v \le 4\}.$$

Můžeme tedy psát

$$\int\int_{E=\Phi(U)} \frac{y}{x} e^{xy}\ dS = \int\int_U u e^v \left| -\frac{1}{2u} \right| dS = \frac{1}{2} \int_2^4 \int_{\frac{1}{2}}^2 e^v\ du\ dv = \frac{3}{4}(e^4 - e^2).$$

10.2 Vypočtěte těžiště tělesa

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \;\&\; x, y, z \geq 0\},$$

s hustotou $\rho = 1$, kde $a, b, c > 0$ jsou parametry.

Řešení:
Oblast integrace E je osmina obecného elipsoidu. Použijeme proto upravené sferické souřadnice Φ (které parametrizují tento elipsoid):

$$\Phi : \quad \begin{array}{rcl} x/a & = & r \sin\theta \cos\varphi \\ y/b & = & r \sin\theta \sin\varphi \\ z/c & = & r\cos\theta \end{array},$$

které vzniknou složením "klasických"sférických souřadnic Ψ a lineární transformace $\mathcal{L}$, která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi, \qquad \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) := (a\tilde{x}, b\tilde{y}, c\tilde{z}).$$

Máme tedy

$$\Phi' = \mathcal{L}'_{|\Phi} \circ \Psi' \quad \text{a} \quad \det \Phi' = (\det \mathcal{L}'_{|\Phi}) \cdot (\det \Psi') = abc \cdot r^2 \sin\theta,$$

protože

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U = \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1 \;\&\; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \;\&\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Výpočet hmotnosti E si usnadníme znalostí objemu koule K o poloměru 1 a toho, že objem E je jedna osmina objemu celého elipsoidu F. Protože $F = \mathcal{L}(K)$, máme:

$$m = \int\int\int_E 1 \; dV = \frac{1}{8} \int\int\int_{F=\mathcal{L}(K)} 1 \; dV = \frac{1}{8} \int\int\int_K |\det \mathcal{L}'| \; dV =$$

$$= \frac{abc}{8} \int\int\int_K 1 \; dV = \frac{abc}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi abc}{6}.$$

Pro zjištění těžiště $T = (T_1, T_2, T_3)$ se nyní stačí omezit jen na jednu složku (např. T_3), protože ostatní lze analogicky získat příslušným natočením elipsoidu do daného směru a zopakováním výpočtu. Máme tedy

$$T_3 = \frac{1}{m} \int\int\int_{E=\Phi(U)} z \; dV = \frac{1}{m} \int\int\int_U (cr\cos\theta) \cdot (abcr^2 \sin\theta) \; dV =$$

$$= \frac{3c}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin 2\theta \; d\varphi \; d\theta \; dr = \frac{3c}{\pi} \Big(\int_0^1 r^3 \; dr \Big) \cdot \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \; d\theta \Big) \cdot \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \; d\varphi \Big) = \frac{3}{8} c.$$

Podobně tedy budeme mít $T_1 = \frac{3}{8}a$ a $T_2 = \frac{3}{8}b$.

10.3 Vypočtěte moment setrvačnosti rotačního paraboloidu E o výšce h a poloměru postavy R vzhledem k ose, která prochází těžištěm E a je kolmá k ose rotační symetrie paraboloidu E (tzv. *ekvatoriální moment*).

Řešení:
Oblast integrace je

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{h}{R^2}(x^2 + y^2) \leq z \leq h\}.$$

Určíme těžiště tělesa E pomocí cylindrických souřadnic

$$\Phi(r, \varphi, z) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi, z)$$

a parametrizace

$$U = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{hr^2}{R^2} \leq z \leq h \ \& \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

tj. $\Phi(U) = E$.

hmotnost:

$$m = \int\int\int_{E=\Phi(U)} 1 \ dV = \int\int\int_{U} r \ dV = \int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^h \int_0^{2\pi} r \ d\varphi \ dz \ dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R r\left(h - \frac{hr^2}{R^2}\right) dr = 2\pi h\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = \frac{\pi h R^2}{2}.$$

Těleso E je rotačně symetrické podle osy z, takže je potřeba určit pouze z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m}\int\int\int_{E=\Phi(U)} z \ dV = \frac{1}{m}\int\int\int_{U} zr \ dV = \frac{1}{m}\int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^h \int_0^{2\pi} zr \ d\varphi \ dz \ dr =$$

$$= \frac{4}{hR^2}\int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^h zr \ dz \ dr = \frac{2}{hR^2}\int_0^R r\left(h^2 - \frac{h^2 r^4}{R^4}\right) dr = \frac{2h}{R^2}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6R^4}\right]_0^R = \frac{2}{3}h.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé na osu z a procházející těžištěm nebude (vzhledem k symetrii tělesa E podle osy z) záviset na konkrétní volbě směru této osy. Zvolíme si ji tedy např. rovnoběžnou s osou x - tj. osa p bude mít rovnice $y = 0$ a $z = \frac{2}{3}h$. Hledaný moment setrvačnosti pak bude

$$M = \int\int\int_{E} \left(\rho_p(x, y, z)\right)^2 \ dV,$$

kde $\rho_p(x, y, z) = y^2 + \left(z - \frac{2}{3}h\right)^2$ je čtverec vzdálenosti bodu (x, y, z) od přímky p.

K výpočtu momentu použijeme opět transformaci Φ:

$$M = \int\int\int_{E=\Phi(U)} y^2 + \left(z - \frac{2}{3}h\right)^2 \ dV = \int\int\int_{U} r^3 \sin^2\theta + r\left(z - \frac{2}{3}h\right)^2 \ dV =$$

$$= \int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^h \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2\theta + r\left(z - \frac{2}{3}h\right)^2 \ d\varphi \ dz \ dr = \pi \int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^h r^3 + 2r\left(z - \frac{2}{3}h\right)^2 \ dz \ dr =$$

$$= \pi \int_0^R hr^3\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{2}{3}r\left[\left(z - \frac{2}{3}h\right)^3\right]_{z=\frac{hr^2}{R^2}}^{z=h} dr = \pi h \int_0^R r^3 - \frac{r^5}{R^2} + \frac{2}{81}rh^2 - \frac{2}{3}h^2 r\left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{2}{3}\right)^3 dr =$$

$$= \pi h\left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{6} + \frac{R^2h^2}{81} - \left[\frac{h^2R^2}{12}\left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{2}{3}\right)^4\right]_0^R\right) = \frac{\pi h R^2}{12}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right).$$