11. cvičení z Matematiky 2

27. dubna - 1. května 2015

11.1 Integrujte funkci $f(x,y) = \frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}$ podél křivky $\mathcal{C}$: $y = \frac{x^2}{2}$ od bodu $A = (1, \frac{1}{2})$ do bodu $B = (0,0)$.

Řešení:
Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int_{\mathcal{C}} f\ ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot ||\varphi'(t)||\ dt,$$

kde φ je vhodná parametrizace křivky $\mathcal{C}$, tj. zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$, které je

- po částech spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$,
- $\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$
- $\varphi(\langle a, b\rangle) = \mathcal{C}$
- φ je prosté na $\langle a, b\rangle$ až na konečně mnoho vyjímek $t_1, \ldots, t_n \in \langle a, b\rangle$.

Jako parametrizaci si zvolíme $\varphi(t) = \left(1-t, \frac{(1-t)^2}{2}\right)$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$, které zřejmě splňuje všechny uvedené podmínky. Pak je

$$\varphi'(t) = (-1, t-1) \quad \text{a} \quad ||\varphi'(t)|| = \sqrt{1+(t-1)^2}.$$

Takže

$$\int_{\mathcal{C}} f\ ds = \int_0^1 \frac{1-t+\frac{(1-t)^4}{4}}{\sqrt{1+(1-t)^2}} \cdot \sqrt{1+(t-1)^2}\ dt = \int_0^1 1-t+\frac{(1-t)^4}{4}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} u=1-t \\ du=-dt \end{smallmatrix}\right] =$$

$$= -\int_1^0 u + \frac{u^4}{4}\ du = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20}.$$

11.2 Integrujte funkci $f(x,y) = x + y$ podél křivky $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = 4$ v prvním kvadrantu od bodu $A = (2,0)$ do bodu $B = (0,2)$.

Řešení:
Jako parametrizaci si zvolíme např. polární souřadnice $\varphi(t) = \big(2\cos(t), 2\sin(t)\big)$ pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Pak je

$$\varphi'(t) = \big(-2\sin(t), 2\cos(t)\big) \quad \text{a} \quad ||\varphi'(t)|| = 2.$$

Takže

$$\int_{\mathcal{C}} f\ ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) + \sin(t)\ dt = 4\Big[\sin(t) - \cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8.$$

11.3 Spočítejte délku části kuželové spirály $\mathcal{C}$ s $n \in \mathbb{N}$ závity definované parametrizací $\varphi : \langle 0, 2n\pi\rangle \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t).$$

Řešení:
Křivka leží v plášti kužele $x^2 + y^2 = z^2$. Délka křivky $\mathcal{C}$ s parametrizací φ se pak vypočítá jako

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b ||\varphi'(t)||\ dt \quad \Big(= \int_{\mathcal{C}} 1\ ds \Big),$$

neboli jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky $\mathcal{C}$. Máme tedy

$$\varphi'(t) = \big(\cos(t) - t\sin(t), \sin(t) + t\cos(t), 1\big)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{\big(\cos(t) - t\sin(t)\big)^2 + \big(\sin(t) + t\cos(t)\big)^2 + 1^2} = \sqrt{2+t^2},$$

takže dostáváme

$$L(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} 1\ ds = \int_0^{2n\pi} \sqrt{2+t^2}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} t=\sqrt{2}u \\ dt=\sqrt{2}du \end{smallmatrix}\right] = 2\int_0^{\sqrt{2}n\pi} \sqrt{1+u^2}\ du = \left[\begin{smallmatrix} u=\sinh(x) \\ du=\cosh(x)dx \end{smallmatrix}\right] =$$

$$= 2\int_0^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} \cosh^2(u)\ du = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} 1 + \cosh(2u)\ du = \Big[u + \frac{\sinh(2u)}{2}\Big]_0^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} =$$

$$= \Big[u + \sinh(u)\cosh(u)\Big]_0^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} = \Big[u + \sinh(u)\sqrt{1+\sinh(u)^2}\Big]_0^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} =$$

$$= \operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi) + \sqrt{2}n\pi\sqrt{1+2n^2\pi^2} = \ln\Big(\sqrt{2}n\pi + \sqrt{1+2n^2\pi^2}\Big) + \sqrt{2}n\pi\sqrt{1+2n^2\pi^2}.$$

Poznámka: Využili jsme zde vztahy pro hyperbolické funkce

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \text{a} \qquad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

(jde o rozklad funkce e^x na sudou a lichou funkci, tj. $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$), které se podobají vztahům pro goniometrické funkce $\cos x$ a $\sin x$:

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1,$	$\sinh'(x) = \cosh(x)$
$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x),$	$\cosh'(x) = \sinh(x)$

Sečtením dostaneme

$$\cosh^2(x) = \frac{1+\cosh(2x)}{2}$$

a zderivováním tohoto vztahu pak

$$2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x).$$

Vyřešením kvadratické rovnice dostaneme vyjádření inverzní funkce pro $u = \sinh(x)$:

$$\operatorname{arcsinh}(u) = \ln\Big(u + \sqrt{1+u^2}\Big).$$