12. cvičení z Matematiky 2

4. května - 8. května 2015

12.1 Najděte plochu části roviny $x + 2y + z = 4$, která leží uvnitř válce $x^2 + y^2 = 4$.

Řešení:
Plocha je určena jako $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 4 \;\&\; x^2 + y^2 \leq 4\}$. Její obsah spočítáme podle vztahu

$$\iint_M 1 \; dS = \iint_U \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \; dS,$$

kde Φ je vhodná parametrizace plochy M, tj. zobrazení $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^2$, které je

- spojitě diferencovatelné a prosté na U°,
- $\Phi(U) = M$
- matice Φ' má hodnost 2 na U° (neboli $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \neq 0$ na U°).

Protože plocha M je grafem funkce $f(x, y) = 4 - x - 2y$ s definičním oborem $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, jako parametrizaci si jednoduše zvolíme

$$\Phi(x, y) = \Big(x, y, f(x, y)\Big) = (x, y, 4 - x - 2y)$$

pro $(x, y) \in U$.

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, -1) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, -2)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1, 2, 1) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{6},$$

takže Φ zřejmě splňuje všechny uvedené podmínky.

Můžeme tedy psát

$$\iint_M 1 \; dS = \iint_U \sqrt{6} \; dS = \sqrt{6} \iint_U 1 \; dS = \sqrt{6} \cdot 4\pi,$$

protože obsah kruhu U o poloměru 2 je 4π.

12.2 Najděte plochu paraboloidu $z = x^2 + y^2$, která leží pod rovinou $z = 9$.

Řešení:
Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladu. Plocha je určena jako

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z \leq 9\}.$$

Jako parametrizaci si zvolíme

$$\Phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

s definičním oborem

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 9\}.$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{4(x^2+y^2)+1}.$$

Takže

$$\iint\limits_M 1 \; dS = \iint\limits_U \sqrt{4(x^2+y^2)+1} \; dS = \left[\substack{x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ (r,\varphi) \in \langle 0,3\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle} \right] = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^3 r\sqrt{4r^2+1} \; dr \; d\varphi =$$

$$= \Big(\int\limits_0^3 r\sqrt{4r^2+1} \; dr \Big) \cdot \Big(\int\limits_0^{2\pi} 1 \; d\varphi \Big) = \Big[\frac{(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}}{12} \Big]_0^3 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}(37^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Při rozdělení integrálu na součin jednotlivých integrálů jsme využili to, ze proměnné ve funkci jsou separované (pomocí součinu) a množina, nad kterou integrujeme, je kartézským součinem pro jednotlivé proměnné.

12.3 Spočítejte

$$\iint\limits_M z \; dS,$$

kde M je částí válce $x^2 + y^2 = 1$ mezi rovinami $z = 0$ a $z = x + 1$.

Řešení:
Plocha je určena jako

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \;\&\; 0 \le z \le x + 1\}.$$

Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$$

s definičním oborem

$$U = \{(\varphi, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \varphi \le 2\pi \;\&\; 0 \le z \le 1 + \cos\varphi\}.$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\| = 1.$$

Integrál z (integrabilní) funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je určený jako

$$\iint\limits_M f\ dS = \iint\limits_U f(\Phi(\varphi, z)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\|\ dS.$$

Takže pro funkci $f(x, y, z) = z$ máme

$$\iint\limits_M f\ dS = \iint\limits_U z\ dS = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{1+\cos\varphi} z\ dz\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\varphi)^2}{2}\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{2} + \cos\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{2} \Big)\ d\varphi =$$

$$= \pi + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

12.4 Spočítejte

$$\iint\limits_M yz\ dS,$$

kde M je povrch popsaný parametricky rovnicemi $x = uv$, $y = u + v$, $z = u - v$ a $u^2 + v^2 \leq 1$.

Řešení:
Plochu máme nyní definovanou jako $M = \Phi(U)$, kde

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$$

a $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u, v) = (uv, u + v, u - v).$$

Ověříme ještě, že Φ je skutečně parametrizace plochy M (tj. Φ je prosté a hodnost derivace Φ' je 2).

Prostota Φ plyne z toho, ze druhá a třetí souřadnice tohoto zobrazení (tj. $y = u + v$ a $z = u - v$) tvoří regulární lineární zobrazení (které je prosté). Hodnost derivace ověříme jako v předchozím případě pomocí vektorového součinu:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (v, 1, 1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (u, 1, -1)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (-2, v + u, v - u) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \sqrt{2(u^2 + v^2) + 4} \neq 0.$$

Pro integrál pak máme

$$\iint\limits_M yz\ dS = \iint\limits_U (u^2 - v^2)\sqrt{2(u^2 + v^2) + 4}\ dS = \left[\begin{smallmatrix} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \\ (r,\varphi) \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \end{smallmatrix} \right] =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 r^3(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\sqrt{2r^2 + 4}\ dr\ d\varphi = \Big(\int\limits_0^3 r^3\sqrt{2r^2 + 4}\ dr \Big) \cdot \Big(\int\limits_0^{2\pi} \cos 2\varphi\ d\varphi \Big) = 0,$$

protože druhý integrál je nulový.

Poznámka: Můžeme ještě určit, jak vlastně plocha M vypadá. Z rovnic $y = u + v$ a $z = u - v$ dostaneme $u = \frac{z+y}{2}$ a $v = \frac{y-z}{2}$. Takže $x = uv = \frac{y^2-z^2}{4}$ a $1 \geq u^2 + v^2 = \frac{z^2+y^2}{4}$. Celkově tedy máme vztahy

$$y^2 - z^2 = 4x, \qquad y^2 + z^2 \leq 4$$

což je část hyperbolického paraboloidu (tj. sedlo) nacházející se uvnitř válce s osou x a poloměrem 2.

12.5 Spočítejte

$$\iint\limits_M x^2 z + y^2 z \; dS,$$

kde M je povrch polokoule $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Řešení:
Plochu $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \;\&\; z \geq 0\}$ parametrizujeme pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \theta) = (2 \sin\theta \cos\varphi, 2 \sin\theta \sin\varphi, 2 \cos\theta)$$

s definičním oborem

$$U = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi \;\&\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Dále máme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = (-2 \sin\theta \sin\varphi, 2 \sin\theta \cos\varphi, 0)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = (2 \cos\theta \cos\varphi, 2 \cos\theta \sin\varphi, -2 \sin\theta).$$

Výpočet normy vektorového součinu si zjednodušíme tím, že si všimneme, že dané vektory jsou na sebe kolmé, tj. $\frac{\partial\Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0$. Pak je

$$\left\| \frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial u} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right\| = 4|\sin\theta|.$$

Máme tedy

$$\iint\limits_M x^2 z + y^2 z \; dS = \iint\limits_U (8 \sin^2\theta \cos\theta) \cdot 4|\sin\theta| \; dS = \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 32 \sin^3\theta \cos\theta \; d\theta \Big) \cdot \Big(\int_0^{2\pi} 1 \; d\varphi \Big) =$$

$$= 2\pi \Big[8 \sin^4\theta \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 16\pi.$$