13. cvičení z Matematiky 2

11. května - 15. května 2015

13.1 Najděte práci síly $\vec{F} = (y+z, z+x, x+y)$ vykonané na částici podél křivky $\mathcal{C}$ s parametrizací $\varphi(t) = (t, t^2, t^4)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Její orientace je indukována touto parametrizací.

Řešení:
Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt.$$

Máme

$$\varphi'(t) = (1, 2t, 4t^3)$$

a tedy

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_0^1 (t^2+t^4, t^4+t, t+t^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 4t^3 \end{pmatrix}\ dt = \int\limits_0^1 3t^2 + 5t^4 + 6t^5\ dt = \Big[t^3 + t^5 + t^6\Big]_0^1 = 3.$$

13.2 Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\vec{F} = (2xy^3, 4x^2y^2)$ vykonané na částici podél křivky $\mathcal{C}$, která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka $\mathcal{C}$ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

Řešení:
Máme tedy oblast

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\ \&\ 0 \le y \le x^3\}.$$

Její hranicí je po částech diferencovatelná křivka

$$\mathcal{C} = \partial M = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\} \bigcup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\ \&\ y = x^3\},$$

která má orientaci odpovídající použití Greenovy věty.

Podle Greenovy věty tedy pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ máme

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\ dS,$$

kde výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$. Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru"v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry"pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbyde jen "vír"na okraji oblasti.

Máme tedy

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8xy^2 - 6xy^2 = 2xy^2$$

a proto

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\, dS = \iint\limits_{M} 2xy^2\, dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^3} 2xy^2\, dy\, dx = \int\limits_0^1 \frac{2}{3}x^{10}\, dx = \frac{2}{33}.$$

13.3 Dokažte, že práce síly $\vec{F} = (x^2+y, y^2+x, ze^z)$ podél křivky z $(1,0,0)$ do $(1,0,1)$ nezávisí na dráze.

Řešení:
Práce síly $\vec{F}$ v oblasti U (tj. otevřené souvislé množině) z bodu A do bodu B nezávisí na dráze právě když pole má potenciál, tj. existuje funkce $f: U \to \mathbb{R}$, že $\mathrm{grad}(f) = \vec{F}$.

Pokud je oblast U navíc jednoduše souvislá (tj. jakákoliv uzavřená křivka v U se dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu), pak toto nastává právě když $\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0$ na celém U.

Příkladem jednoduše souvislé oblasti je $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Příkladem oblasti, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus$ "osa x" nebo torus (tj. "pneumatika").

V našem případě je oblastí celé $\mathbb{R}^3$, tedy jednoduše souvislá oblast. Pole rotace je definováno jako

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \ -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z},\ \ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

Nyní po dosazení máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = (0-0, 0-0, 1-1),$$

tedy rotace je nulová na celém $\mathbb{R}^3$ a pole $\vec{F}$ má potenciál.

V případě existence potenciálu je vhodné ho explicitně najít. Hledáme tedy funkci $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ze^z.$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x,y,z) = \int (x^2+y)\, dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y,z),$$

kde $C: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2 + x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y,z)\right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = y^2.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int y^2\ dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Dostáváme tedy zatím

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)\Big) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z\ dz = (z-1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z-1)e^z + K.$$

Poznámka: Jestliže pole $\vec{F}$ vznikne jako gradient f, pak jeho rotace je nulová a tato nulovost vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací funkce f. Nulová rotace je ale jen nutnou podmínkou pro existenci potenciálu v případě, že oblast není jednoduše souvislá, jak ukazuje příklad vektorového pole

$$\vec{F} = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\Big)$$

na množině $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$, která není jednoduše souvislá.

Máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \Big(0, 0, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big) = \vec{0}$$

ale práce síly $\vec{F}$ podél kružnice $\mathcal{C} : \varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$ je nenulová:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int\limits_0^{2\pi} 1\ d\alpha = 2\pi.$$

Pole tedy nemá potenciál na celém U. Na druhé straně, na určitých podmnožinách U lze potenciál pole $\vec{F}$ nalézt, např.

$$f_1(x,y,z) = \operatorname{arctg}\Big(\frac{y}{x}\Big) \quad \text{na} \quad U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$$

nebo

$$f_2(x,y,z) = \operatorname{arccotg}\Big(\frac{x}{y}\Big) \quad \text{na} \quad U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}.$$

13.4 Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\iint\limits_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

kde $\vec{F} = (xyz, x, e^{xy}\cos z)$ a M je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $z \geq 0$ s orientací směrem vzhůru.

Řešení:

Stokesova věta je zobecnění Greenovy věty z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ (orientovaná plocha, jejíž je křivka nyní okrajem, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (vztyčený palec poblíž okraje ukazuje směr orientace plochy a prsty směr orientace okraje).

Máme

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \ \& \ z \geq 0\}$$

a

$$\partial M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1 \ \& \ z = 0\}.$$

Plocha M je orientovaná směrem "nahoru"a orientace jejího okraje ∂M tedy odpovídá orientaci dané např. parametrizací $\varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ pro $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Máme tedy

$$\varphi'(\alpha) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$$

$$\iint\limits_{M} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} (0, \cos\alpha, e^{\sin\alpha\cos\alpha}) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\alpha \ d\alpha = \pi.$$