14. cvičení z Matematiky 2

18. května - 22. května 2015

14.1 Ověřte Gaussovu větu pro pole $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ a sféru $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Řešení:
Gaussova věta

$$\iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{M} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV$$

dává do souvislosti tok pole $\vec{F}$ přes okraj ∂M oblasti M v $\mathbb{R}^3$ s integrálem přes tuto oblast M. Funkce

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

která se integruje v M se nazývá divergence pole $\vec{F}$ a interpretuje se jako "zdroj"pole v daném bodě (při kladné hodnotě) případně "odtok"pole v daném bodě (při záporné hodnotě). Smyslem Gaussovy věty tedy je, že celková "změna pole"v objemu odpovídá příslušnému toku pole přes okraj.

Orientace okraje ∂M je v tomto případě daná vnější normálou.

V našem případě máme

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

a

$$\partial M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Gaussovu větu teď ověříme tak, že zjistíme, zda oba integrály dávají stejnou hodnotu.

Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

a

$$\iiint\limits_{M} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \iiint\limits_{M} 3(x^2 + y^2 + z^2)\ dV = \left[\begin{smallmatrix} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \\ (r,\varphi,\theta)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\pi\rangle \end{smallmatrix}\right] =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} 3r^2 \cdot |r^2 \sin\theta|\ dr\ d\varphi\ d\theta = \left(\int_0^1 3r^4\ dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta\right) = \frac{3}{5} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{12}{5}\pi.$$

Pro druhý integrál si zvolíme parametrizaci ∂M pomocí sférických souřadnic

$$\Phi(\varphi, \theta) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

s definičním oborem

$$U = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ \&\ 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= (\,-\sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ \ 0\,) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial\theta} &= (\ \ \cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta\,) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\sin\theta \cdot (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = -\sin\theta \cdot \vec{\Phi}(\varphi, \theta).$$

Vektor $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$ tedy má směr normály směřující dovnitř. Protože plochu máme orientovanou směrem ven, musíme při výpočtu toku pole vzít tento vektor s opačným znaménkem, tj. $-\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$.

Dosazením tedy obdržíme

$$\iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{U} \vec{F}(\Phi(\varphi,\theta)) \cdot \Big(- \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \Big) dS = \iint\limits_{U} \vec{F}(\Phi(\varphi,\theta)) \cdot \Big(\sin\theta \cdot \vec{\Phi}(\varphi,\theta) \Big)\ dS =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin\theta \Big(\sin^4\theta \cos^4\varphi + \sin^4\theta \sin^4\varphi + \cos^4\theta \Big)\ d\varphi\ d\theta =$$

$$= \Big(\int\limits_0^{\pi} \sin^5\theta\ d\theta \Big) \cdot \Big(\int\limits_0^{2\pi} \cos^4\varphi + \sin^4\varphi\ d\varphi \Big) + \Big(\int\limits_0^{\pi} \cos^4\theta \sin\theta\ d\theta \Big) \cdot \Big(\int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi \Big).$$

Pro první dva integrály máme díky posunutí a symetriím, že

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^4\varphi\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \sin^4\varphi\ d\varphi = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\ d\varphi$$

a

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^5\theta\ d\theta = 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\ d\theta.$$

Pro $n \geq 2$ spočítáme tedy integrál

$$A_n := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\alpha\ d\alpha = [-\cos\alpha \cdot \sin^{n-1}\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}\alpha \cdot \cos^2\alpha\ d\alpha =$$

$$= (n-1) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha)\ d\alpha = (n-1)A_{n-2} - (n-1)A_n.$$

Tedy máme $A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}$ a $A_2 = \frac{\pi}{4}$ a $A_0 = 1$. Dokončením výpočtu dostáváme

$$\iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \dots = \Big(2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \Big) \cdot \Big(8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \Big) + \Big(\Big[- \frac{\cos^5\theta}{5} \Big]_0^{\pi} \Big) \cdot \Big(2\pi \Big) = \frac{8}{5}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{12}{5}\pi,$$

a Gaussova věta je tak ověřena.

14.2 Spočítejte tok pole $\vec{F} = (e^y, ye^x, x^2y)$ částí paraboloidu $z = x^2 + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ s horní orientací.

Řešení:
Plocha M je grafem funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$, takže ji přirozeně parametrizujeme pomocí

$$\Phi(x,y) = \Big(x, y, f(x,y) \Big) = (x, y, x^2 + y^2)$$

s definičním oborem

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \ \& \ 0 \le y \le 1\}.$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$$

Třetí složka vektoru $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ je kladná, tedy tento normálový vektor odpovídá zadané orientací plochy "nahoru". Máme tak

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}(\Phi(x, y)) \cdot \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\Big) dS = \iint_U (e^y, ye^x, x^2 y) \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} dS =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (-2xe^y - 2y^2 e^x + x^2 y)\ dx\ dy = \int_0^1 -e^y - 2y^2(e^1 - 1) + \frac{y}{3}\ dy = -(e-1) - \frac{2}{3}(e-1) + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{11}{6} - \frac{5}{3} e.$$

14.3 Použitím Gaussovy věty spočítejte tok pole $\vec{F} = (3y^2 z^3, 9x^2 y z^2, -4xy^2)$ povrchem krychle $M = \langle 0, 1\rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$.

Řešení:
Pro použití Gaussovy věty předpokládáme vnější orientaci povrchu krychle ∂M. Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 9x^2 z^2$$

a

$$\iint_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_M \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 9x^2 z^2\ dx\ dy\ dz = \Big(\int_0^1 9x^2\ dx\Big) \cdot \Big(\int_0^1 1\ dy\Big) \cdot \Big(\int_0^1 z^2\ dz\Big) = 1.$$

14.4 Ověřte Gaussovu větu pro pole $\vec{F} = (3x, xy, 2xz)$ a krychli $M = \langle 0, 1\rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$.

Řešení:
Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3 + x + 2x = 3 + 3x$$

a

$$\iiint_M \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (3 + 3x)\ dx\ dy\ dz = \Big(\int_0^1 3 + 3x\ dx\Big) \cdot \Big(\int_0^1 \int_0^1 1\ dy\ dz\Big) = \frac{9}{2}.$$

Integrál přes okraj rozdělíme na jednotlivé stěny $(\partial M)_i$, $i = 1, \ldots, 6$ a pro vztah

$$I_i := \iint\limits_{(\partial M)_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{U_i} \vec{F}(\Phi_i) \cdot \vec{n}_i \; dS$$

použijeme parametrizace Φ_i, kde $U_i = \langle 0, 1\rangle^2$, a příslušné orientace $(\partial M)_i$ pomocí normovaných normálových vektorů $\vec{n}_i$:

$$\Phi_1(x,y) = (x,y,1), \quad \vec{n}_1 = (0,0,1), \quad I_1 = \int_0^1\int_0^1 (3x, xy, 2x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; dx \; dy = \int_0^1\int_0^1 2x \; dx \; dy = 1$$

$$\Phi_2(x,y) = (x,y,0), \quad \vec{n}_2 = (0,0,-1), \quad I_2 = \int_0^1\int_0^1 (3x, xy, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \; dx \; dy = 0$$

$$\Phi_3(x,z) = (x,1,z), \quad \vec{n}_3 = (0,1,0), \quad I_3 = \int_0^1\int_0^1 (3x, x, 2xz) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; dx \; dz = \int_0^1\int_0^1 x \; dx \; dz = \frac{1}{2}$$

$$\Phi_4(x,z) = (x,0,z), \quad \vec{n}_4 = (0,-1,0), \quad I_4 = \int_0^1\int_0^1 (3x, 0, 2xz) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \; dx \; dz = 0$$

$$\Phi_5(y,z) = (1,y,z), \quad \vec{n}_5 = (1,0,0), \quad I_5 = \int_0^1\int_0^1 (3, y, 2z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; dy \; dz = 3$$

$$\Phi_6(y,z) = (0,y,z), \quad \vec{n}_6 = (-1,0,0), \quad I_6 = \int_0^1\int_0^1 (0, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; dy \; dz = 0.$$

Tedy

$$\iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = I_1 + \cdots + I_6 = 1 + \frac{1}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$

a Gaussova věta je tak ověřena.

14.5 Vypočtěte průtok kapaliny, která proteče oblastí $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq a$ (kde $a > 0$, $R > 0$ jsou parametry), je-li rychlost proudění $\vec{F} = (xz, yz, xy)$.

Řešení:
Oblast M je válec o poloměru R a výšce a. Integrály v Gaussově větě udávají rozdíl toho, co do oblasti přiteče a co z oblasti odteče (např. pro konstatní proudění je přítok roven odtoku a integrály jsou nulové), ale neříkají nám kolik kapaliny se celkově v objemu vymění (např. při velkém konstatním proudění to bude více než při malém). Abychom toto zjistili, je potřeba v integrálu toku pole přes povrch vzít zvlášť kladnou část integrované funkce, tj. $\vec{F} \cdot \vec{n} > 0$ v daném bodě (ta odpovídá tomu, co odtéká), a zvlášť zápornou část, tj. $\vec{F} \cdot \vec{n} < 0$ v daném bodě (ta odpovídá tomu, co vtéká).

Nechť $\vec{n}$ představuje vnější normované normálové pole na okraji ∂M. Pak pro

$$\text{odtok} := \iint\limits_{\partial M} \max\{0, \vec{F} \cdot \vec{n}\}\ dS$$

$$\text{přítok} := \Big| \iint\limits_{\partial M} \min\{0, \vec{F} \cdot \vec{n}\}\ dS \Big|$$

máme podle Gaussovy věty

$$\text{odtok - přítok} = \iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = \iiint\limits_{M} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV.$$

Výpočet toku přes ∂M rozdělíme na horní podstavu $(\partial M)_1$, dolní podstavu $(\partial M)_2$ a plášť $(\partial M)_3$.

Pro horní podstavu použijeme parametrizaci

$$\Phi_1(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, a) \ \text{ pro } \ U_1 = \langle 0, R\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$$

a vnější normálové pole

$$\vec{n}_1 = (0, 0, 1).$$

Tedy

$$\iint\limits_{(\partial M)_1} \max\{0, \vec{F} \cdot \vec{n}_1\}\ dS = \iint\limits_{(\partial M)_1} \max\{0, xy\}\ dS = 2 \iint\limits_{\langle 0,R\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle} r^3 \sin\varphi\cos\varphi\ dS =$$

$$= \Big(\int\limits_0^R r^3\ dr\Big) \cdot \Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\ d\varphi\Big) = \frac{R^4}{4} \cdot \Big[\frac{-\cos 2\varphi}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4}{4}.$$

Podobně pro dolní podstavu použijeme parametrizaci

$$\Phi_2(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0) \ \text{ pro } \ U_2 = \langle 0, R\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$$

a vnější normálové pole

$$\vec{n}_2 = (0, 0, -1).$$

Tedy

$$\iint\limits_{(\partial M)_2} \max\{0, \vec{F} \cdot \vec{n}_2\}\ dS = \iint\limits_{(\partial M)_2} \max\{0, -xy\}\ dS = 2 \iint\limits_{\langle 0,R\rangle \times \langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle} -r^3 \sin\varphi\cos\varphi\ dS =$$

$$= \Big(\int\limits_0^R r^3\ dr\Big) \cdot \Big(\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin 2\varphi\ d\varphi\Big) = \frac{R^4}{4} \cdot \Big[\frac{\cos 2\varphi}{2}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{R^4}{4}.$$

Konečně pro plášť použijeme parametrizaci

$$\Phi_3(\varphi, z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z) \ \text{ pro } \ U_3 = \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, a\rangle.$$

Pak je

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

a vektorový součin

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$$

odpovídá vnější orientaci. Tedy

$$\iint\limits_{(\partial M)_3} \max\{0, \vec{F}\cdot\vec{n}\}\ dS = \iint\limits_{U_3} \max\left\{0, \vec{F}(\Phi_3(\varphi,z))\cdot\Big(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\Big)\right\}\ dS =$$

$$= \iint\limits_{U_3} \max\left\{0, (zR\cos\varphi, zR\sin\varphi, R^2\sin\varphi\cos\varphi)\cdot\left(\begin{smallmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0\end{smallmatrix}\right)\right\}\ dS = \iint\limits_{U_3} \max\{0, zR^2\}\ dS =$$

$$= \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} zR^2\ d\varphi\ dz = \Big(\int\limits_0^a zR^2\ dz\Big)\cdot\Big(\int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi\Big) = \pi R^2 a^2.$$

Celkově tedy máme

$$\text{odtok} = \frac{R^4}{2} + \pi R^2 a^2.$$

Přítok pak spočítáme pomocí Gaussovy věty:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 2z$$

$$\iiint\limits_M \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \iiint\limits_M 2z\ dV = \left[\begin{smallmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ (r,\varphi,z)\in\langle 0,R\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,a\rangle \end{smallmatrix}\right] =$$

$$= \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R 2zr\ dr\ d\varphi\ dz = \Big(\int\limits_0^a z\ dz\Big)\cdot\Big(\int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi\Big)\cdot\Big(\int\limits_0^R 2r\ dr\Big) = \pi R^2 a^2.$$

Tedy

$$\text{přítok} = \text{odtok} - \pi R^2 a^2 = \frac{R^4}{2}.$$

Závěr: Do oblasti přiteče (za jednotku času) $\frac{R^4}{2}$ objemových jednotek kapaliny a odteče $\frac{R^4}{2} + \pi R^2 a^2$ objemových jednotek kapaliny. Oblast tak za jednotku času ztratí $\pi R^2 a^2$ objemových jednotek kapaliny.