2. cvičení z Matematiky 2

23.-27. února 2015

2.1 Jaké jsou obojetné, tj. současně otevřené a uzavřené množiny v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$?

Řešení:
Jediné takové dvě množiny jsou $\emptyset$ a $\mathbb{R}^n$. Pro spor předpokládejme, že existuje $\emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{R}^n$ obojetná. Opřeme se o tvrzení, že jediné souvislé množiny v $\mathbb{R}$ jsou intervaly. Nechť P je nyní přímka v $\mathbb{R}^n$ spojující nějaký bod $a \in A$ a bod $b \in A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$. Přímku P můžeme ztotožnit s prostorem $\mathbb{R}$. Množiny $P \cap A$ a $P \cap A^c$ jsou nyní neprázdné a otevřené v rámci množiny P a disjunktně pokrývají P. To však není možné, protože P (chápaná jako $\mathbb{R}$) je souvislá množina.

2.2 Sestrojte příklady neprázdných množin M v $\mathbb{R}^2$, že

(i) nemá žádný vnitřní bod,

(ii) nemá žádný hraniční bod,

(iii) nemá žádný vnější bod,

(iv) nemá žádný hromadný bod,

(v) nemá žádný izolovaný bod.

Řešení:
(i) jakákoliv spočetná množina (např. $\mathbb{Q}^2$), kružnice, přímka, ...
(ii) Z požadavku $\partial M = \emptyset$ plyne, že $M^\circ \subseteq M \subseteq \overline{M} = \partial M \cup M^\circ = M^\circ$, tedy M je současně otevřená a uzavřená. Podle příkladu **2.1**, je to pouze když $M = \mathbb{R}^2$.
(iii) Vnějšek množiny je roven $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{M}$, tedy potřebujeme, aby $\overline{M} = \mathbb{R}^2$ (množina je tzv. *hustá*). Můžeme opět volit např. $M = \mathbb{Q}^2$.
(iv) jakákoliv konečná množina; $\mathbb{N}^2$, ...
(v) jakákoliv otevřená množina, ...

2.3 Pro množiny A, B v $\mathbb{R}^k$ platí:

- A, B otevřené $\Rightarrow A \cap B$ otevřená
- $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
- A, B uzavřené $\Rightarrow A \cup B$ uzavřená
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Najděte příklady, kdy uvedená tvrzení neplatí "pro zbylé možnosti", tj.

(i) A_n , $n \in \mathbb{N}$ otevřené, ale $\bigcap_n A_n$ už není otevřená

(ii) $(A \cup B)^\circ \supsetneq A^\circ \cup B^\circ$

(iii) A_n , $n \in \mathbb{N}$ uzavřené, ale $\bigcup_n A_n$ už není uzavřená

(iv) $\overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}$

Řešení:
(i) $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\bigcap_n A_n = \{0\}$.
(iii) $A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}\rangle \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\bigcup_n A_n = (-\infty, 0)$.
(ii), (iv) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x\}$. Pak je

$$(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}^2 \supsetneq \mathbb{R}^2 \setminus \text{osa } y = A^\circ \cup B^\circ$$

a

$$\overline{A \cap B} = \emptyset \subsetneq \text{osa } y = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

2.4 Stanovte hromadné body množiny $M = \{(1/n, 1/m) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Řešení:
Ukážeme, že množina hromadných bodů je $N = \{(1/n, 0), (0, 1/n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0)\}$. Zřejmě každý prvek N je hromadný bod M. Naopak, nechť $a \in \mathbb{R}^2$ je hromadný bod M, speciálně $a \in \overline{M}$. Protože jednotlivé projekce $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi_1(x, y) := x$, $\pi_2(x, y) := y$ jsou spojité funkce, tak pro posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ je také $\lim_{n\to\infty} \pi_i(a_n) = \pi_i(a)$. Tedy $\pi_i(a) \subseteq \overline{\pi_i(M)} = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ pro $i = 1, 2$. Máme tak, že $a \in (\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\})^2 = M \cup N$. Všechny body původní množiny M jsou ale izolované, tedy musí být $a \in N$.

2.5 Ukažte, že uzávěr každé množiny M je sjednocení této množiny s množinou jejích hromadných bodů.

Řešení:
Plyne ihned z definic:
$a \in \overline{M} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$
a je hromadný bod $M \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ P_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$

2.6 Rozhodněte, zda množina je souvislá:

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leq ||(x, y)|| < 5\}$,

(ii) $\mathbb{Q}^2$.

Řešení:
(i) Množina M se nazývá *obloukově souvislá*, pokud každé dva body $a, b \in M$ existuje spojitá křivka $s : \langle 0, 1\rangle \to M$, že $s(0) = a$ a $s(1) = b$. Každá obloukově souvislá množina je souvislá.

Opačné tvrzení platí (v $\mathbb{R}^n$), pokud ještě předpokládáme otevřenost dané množiny (tedy otevřená souvislá je obloukově souvislá).

Uvedená množina je souvislá, protože je obloukově souvislá (body lze spojit např. soustřednými kružnicemi a ty pak propojit úsečkou směřující do počátku).

(ii) Množina není souvislá, protože ji lze rozložit pomocí dvou neprázdných disjunktních otevřených množin A a B, např. $A = \{(x, y \in \mathbb{R}^2) \mid x < \sqrt{2}\}$ a $B = \{(x, y \in \mathbb{R}^2) \mid x > \sqrt{2}\}$.