Písemka z MA2, varianta A **29. 4. 2015**

1. Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x,y) = 2x - y + 1$ za podmínky $x^2 + 2x + y^2 = 0$.

Řešení:
Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro kružnici $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$, kde $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = (x+1)^2 + y^2 - 1$. Pro extrém $a = (x,y)$ na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2,-1) = f'_{|a} = \lambda g'_{|a} = \lambda \cdot \Big(2(x+1), 2y\Big)$$

a

$$(x+1)^2 + y^2 = 1.$$

Vyjádříme x a y pomocí λ a dosadíme do vazby. Dostaneme $\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ a kandidáty na extrémy:

$$\Big(\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, -\frac{\sqrt{5}}{5}\Big), \qquad \Big(-\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, \frac{\sqrt{5}}{5}\Big)$$

s hodnotami

$$f\Big(\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, -\frac{\sqrt{5}}{5}\Big) = \sqrt{5} - 1, \qquad f\Big(-\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, \frac{\sqrt{5}}{5}\Big) = -\sqrt{5} - 1.$$

Množina M je uzavřená a omezená a spojitá funkce f tak v těchto kandidátech skutečně nabývá svého maxima a minima.

2. Najděte Taylorův polynom řádu 2 funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} - \cos(x-y)$$

v bodě $a = (0,0)$ a podle tohoto polynomu rozhodněte, zda má funkce v tomto bodě minimum, maximum nebo sedlový bod.

Řešení:

$$f'_{|(0,0)} = \Big(2xe^{x^2+y^2} + \sin(x-y), 2ye^{x^2+y^2} - \sin(x-y)\Big)_{|(0,0)} = (0,0)$$

$$f''_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2} + \cos(x-y) & 4xye^{x^2+y^2} - \cos(x-y) \\ 4xye^{x^2+y^2} - \cos(x-y) & 2e^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2} + \cos(x-y) \end{pmatrix}_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ máme

$$T_2(\mathbf{h}) = f(0,0) + f'_{|(0,0)}\mathbf{h} + \frac{1}{2!}f''_{|(0,0)}(\mathbf{h},\mathbf{h}) = \frac{1}{2}(h_1,h_2)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}h_1^2 - h_1h_2 + \frac{3}{2}h_2^2.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 3 > 0$, $\Delta_2 = 8 > 0$) je matice $f''_{(0,0)}$ pozitivně definitní, takže v bodě $a = (0,0)$ je lokální minimum.

Jiné řešení: Polynom lze také získat Taylorovými polynomy funkcí jedné proměnné:

$$e^t = 1 + t + \varphi(t) \cdot |t|$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \psi(t) \cdot |t|^2$$

kde $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0$ a $\lim_{t\to 0}\psi(t) = 0$.

$$f(h_1,h_2) = e^{h_1^2+h_2^2} - \cos(h_1-h_2) = 1 + h_1^2 + h_2^2 + \varphi(h_1^2+h_2^2) - \Big(1 - \frac{(h_1-h_2)^2}{2} + \psi(h_1-h_2)\Big) =$$

$$= \frac{3}{2}h_1^2 - h_1h_2 + \frac{3}{2}h_2^2 + \Omega(\mathbf{h}),$$

kde $\Omega(\mathbf{h}) = \varphi(h_1^2+h_2^2)\cdot|h_1^2+h_2^2| - \psi(h_1-h_2)\cdot|h_1-h_2|^2$.

Výraz $T(h_1,h_2) = \frac{3}{2}h_1^2 - h_1h_2 + \frac{3}{2}h_2^2$ je hledaným Taylorovým polynomem stupně nejvýše 2, protože $\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\Omega(\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||^2} = 0$:

$$\frac{|\Omega(\mathbf{h})|}{||\mathbf{h}||^2} \le \big|\varphi(||\mathbf{h}||^2)\big| + \big|\psi(h_1-h_2)\big|\cdot\frac{|h_1-h_2|^2}{||\mathbf{h}||^2} \le \big|\varphi(||\mathbf{h}||^2)\big| + 4\big|\psi(h_1-h_2)\big| \to 0$$

pro $\mathbf{h}\to 0$, protože $|h_1-h_2|^2 \le (|h_1|+|h_2|)^2 \le (2||\mathbf{h}||)^2$.

3. K výpočtu integrálu

$$\int_0^1\int_{2x}^2 (e^{y^2} + 2xy)\; dy\; dx$$

zvolte vhodný způsob integrace.

Řešení:
Použijeme změnu pořadí integrace jednotlivých proměnných. Oblast integrace je

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1 \;\&\; 2x\le y\le 2\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 2 \;\&\; 0\le x\le \frac{y}{2}\}.$$

$$\int_0^1\int_{2x}^2 (e^{y^2}+2xy)\; dy\; dx = \int_0^2\int_0^{\frac{y}{2}} (e^{y^2}+2xy)\; dx\; dy = \int_0^2 \frac{y}{2}e^{y^2} + \frac{y^3}{4}\; dy = \Big[\frac{e^{y^2}}{4} + \frac{y^4}{16}\Big]_0^2 = \frac{e^4+3}{4}.$$

Jiné, mnohem náročnější řešení: Použijeme substituci polárních souřadnic Φ

$$\Phi: \begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}, \qquad \det\Phi' = r$$

oblasti

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1 \;\&\; 2x\le y\le 2\}$$

s paramerizací $E = \Phi(U)$ jako

$$U = \{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le r\cos\varphi\le 1 \;\&\; 2r\cos\varphi\le r\sin\varphi\le 2 \;\&\; 0\le\varphi\le 2\pi\}.$$

Ta se po úpravách zjednoduší na

$$U = \{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le r\le \frac{2}{\sin\varphi} \;\&\; \arctan 2\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\}.$$

Pak máme

$$\iint\limits_{E=\Phi(U)} (e^{y^2}+2xy)\,dS = \iint\limits_{U} (e^{r^2\sin^2\varphi}+2r^2\sin\varphi\cos\varphi)r\,dS = \int\limits_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{\frac{2}{\sin\varphi}} (e^{r^2\sin^2\varphi}+2r^2\sin\varphi\cos\varphi)r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{r^2\sin^2\varphi}}{2\sin^2\varphi} + \frac{r^4\sin\varphi\cos\varphi}{2}\right]_{r=0}^{r=\frac{2}{\sin\varphi}} d\varphi = \int\limits_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^4-1}{2\sin^2\varphi} + \frac{8\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \left[\frac{1-e^4}{2}\operatorname{cotg}(\varphi) - \frac{4}{\sin^2\varphi}\right]_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} = -4 - \frac{1-e^4}{2}\frac{1}{\tan(\arctan 2)} + 4\Big(1 + \frac{1}{\big(\tan(\arctan 2)\big)^2}\Big) = \frac{e^4+3}{4}.$$