Písemka z MA2, varianta B **29. 4. 2015**

1. Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$$

na kružnici $x^2 + y^2 = 4$.

Řešení:
Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro kružnici $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$, kde $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$. Pro extrém $a = (x,y)$ na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2x + 2y, -2y + 2x) = f'_{|a} = \lambda g'_{|a} = \lambda \cdot (2x, 2y)$$

a

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Rovnice tedy vyjadřují to, že hledáme vektor $\mathbf{a} = (x,y)^T$ takový, že $||\mathbf{a}|| = 2$ a

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava má netriviální řešení právě když determinant soustavy je roven nule, tj. $-(1-\lambda)(1+\lambda)-1 = 0$, tedy $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Jde v podstatě o hledání vlastních čísel matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ a jejích vlastních vektorů s normou rovnou 2.

Pro $\lambda = \sqrt{2}$ dostáváme:

$$a_1 = \pm\sqrt{2+\sqrt{2}} \; \cdot \; (1, \sqrt{2} - 1)$$

s funkční hodnotou

$$f(a_1) = 4\sqrt{2}.$$

Pro $\lambda = -\sqrt{2}$ dostáváme:

$$a_2 = \pm\sqrt{2-\sqrt{2}} \; \cdot \; (-1, \sqrt{2} + 1)$$

s funkční hodnotou

$$f(a_2) = -4\sqrt{2}.$$

Množina M je uzavřená a omezená a spojitá funkce f tak v těchto bodech skutečně nabývá svého maxima a minima.

2. Velmi unavený horolezec leze po ploše, která je grafem funkce $f(x,y) = e^{xy} + \ln x$. Právě se nachází v bodě $A = (1,1,?) \in \mathbb{R}^3$. Kterým ze dvou směrů

$$\mathbf{U} = (1,2,?) \quad \text{a} \quad \mathbf{V} = (2,1,?)$$

(v tečné rovině grafu funkce f v bodě A) se má vydat, aby šel cestou menšího stoupání?

Řešení:
Pro $a = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ je $f(a) = e$, tedy $A = (1,1,e)$. Spočítáme gradient (derivaci) funkce f:

$$\text{grad } f_{|(1,1)} = f'_{|(1,1)} = (ye^{xy} + \frac{1}{x}, xe^{xy})_{|(1,1)} = (e+1, e)$$

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce f v bodě a je

$$z = f(1,1) + f'_{|(1,1)}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = e + (e+1, e)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = (e+1)x + ey - (e+1)$$

Vektory U a V leží v této tečné rovině (přesněji v jejím zaměření) právě když jsou kolmé na její normálový vektor $\mathbf{N} = (e+1, e, -1)$ (tj. když $\mathbf{U}\cdot\mathbf{N} = 0 = \mathbf{V}\cdot\mathbf{N}$.) Máme tak, že $\mathbf{U} = (1, 2, 3e+1)$ a $\mathbf{V} = (2, 1, 3e+2)$. Strmost stoupání je dána úhlem, který tyto vektory svírají s rovinou $z = 0$, tedy $\arctan\left(\frac{3e+1}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)$ pro $\mathbf{U}$ a $\arctan\left(\frac{3e+2}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)$ pro $\mathbf{V}$. Menší stoupání je tak ve směru vektoru $\mathbf{U}$.

Poznámky:

(1) Mohli jsme využít implicitního zadání grafu $\Phi(x, y, z) = 0$ pro $\Phi(x, y, z) := f(x, y) - z$. Pak bychom rovnou dostali normálový vektor jako gradient Φ, tj. $\mathbf{N} = \operatorname{grad} \Phi_{|A}$.

(2) Pokud položíme $\mathbf{u} = (1, 2)$ a $\mathbf{v} = (2, 1)$, pak máme $\mathbf{U} = \big(\mathbf{u}, f'_{|a}(\mathbf{u})\big)$ a $\mathbf{V} = \big(\mathbf{v}, f'_{|a}(\mathbf{v})\big)$. Pokud navíc platí $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}||$ (jako v našem případě), pak pro strmost stoupání ve směru vektorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ stačí porovnat pouze jejich poslední složky, tj. hodnoty $f'_{|a}(\mathbf{u})$ a $f'_{|a}(\mathbf{v})$.

3. Vypočítejte hodnotu integrálu

$$\iiint\limits_E |z| \; dV,$$

kde $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1 \;\&\; |z| \le 3 \;\&\; y \ge 0\}$.

Řešení:
Oblast E je polovina válce. K výpočtu integrálu použijeme cylindrické souřadnice:

$$\Phi(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z), \qquad \det \Phi' = r$$

s paramerizací oblasti $E = \Phi(U)$ jako

$$U = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le r \le 1 \;\&\; |z| \le 3 \;\&\; 0 \le \varphi \le \pi\}.$$

$$\iiint\limits_{E=\Phi(U)} |z| \; dV = \iiint\limits_U |z| r \; dV = \int_0^1 \int_0^\pi \int_{-3}^3 |z| r \; dz \; d\varphi \; dr = \left(\int_{-3}^3 |z| \; dz\right) \cdot \left(\int_0^\pi 1 \; d\varphi\right) \cdot \left(\int_0^1 r \; dr\right) = \frac{9}{2}\pi.$$