3. cvičení z Matematiky 2

2.-6. března 2015

3.1 Najděte limity

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^2}$

(iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

Řešení:

(i) Pro funkci $f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Bod $(0,0)$ je hromadným bodem množiny D_f (tedy má smysl ptát se na limitu f v tomto bodě). Limitu určíme podle věty o limitě složené funkce $f(x,y) = h(g(x,y))$, kde $g(x,y) = x+y$ a $h(z) = \frac{\sin(z)}{z}$. Pro korektní použití věty o limitě složené funkce ale ještě potřebujeme zajistit, aby buď v okolí bodu $(0,0)$ bylo $g(x,y) \neq 0$ nebo aby funkce h byla spojitá v $z=0$. První případ si můžeme zajistit tak, že vezmeme $D_g := D_f$ a druhý tak, že funkci h spojitě dodefinujeme v $z=0$. Nyní tedy máme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x+y = 0 \quad \text{(protože } g \text{ je součet spojitých funkcí)},$$

$$\lim_{z\to 0} h(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$$

takže

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(g(x,y)) = 1.$$

(ii) Pro funkci $f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm y\}.$$

Zúžením f na osu x (tj. $y=0$) dostáváme

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Na druhou stranu zúžením f na osu y (tj. $x=0$) dostáváme

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{-y^2} = -1.$$

Původní limita tedy neexistuje.

(iii) Pro funkci $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+2y^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Zúžením f na osu x (tj. $y = 0$) dostáváme

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0.$$

Na druhou stranu zúžením f na přímku $x = y$ dostáváme

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{y\to 0} \frac{2x^2}{x^2+2x^2} = \frac{2}{3}.$$

Původní limita tedy neexistuje.

(iv) Pro funkci $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Stačí tedy zjistit $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)$. Použijeme odhad

$$0 \le |x^2y^2\ln(x^2+y^2)| \le (x^4+2x^2y^2+y^4)|\ln(x^2+y^2)| = (x^2+y^2)^2|\ln(x^2+y^2)|.$$

Použitím věty o limitě složené funkce pro

$$g(x,y) = x^2+y^2 \quad \text{a} \quad h(z) = z^2\ln z$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \;\text{ a }\; \lim_{z\to 0_+} h(z) = 0 \;\text{ (např. L'Hospitalovo pravidlo)}$$

dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^2\ln(x^2+y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(g(x,y)) = 0.$$

Z věty o sevření pak máme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = 0$$

tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^0 = 1.$$

3.2 Najděte gradient funkce $f(x,y) = e^x\sin y$ v bodě $a_0 = (1, \frac{\pi}{4})$ a rychlost růstu f v bodě a_0 ve směru vektoru $\mathbf{v} = (-1,2)$.

Řešení:
Gradient $\mathrm{grad} f_{|a_0}$ je maticí (ve standardních souřadnicích) derivace $f'_{|a_0}$ funkce f v bodě a_0. Postačující podmínkou pro existenci derivace funkce f v bodě a_0 je existence spojitých parciálních derivací na nějakém okolí bodu a_0 (což je v našem případě splněno).

$$\mathrm{grad} f_{|a_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{|a_0} = (e^x\sin y, e^x\cos y)_{|a_0} = \left(e\frac{\sqrt{2}}{2}, e\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Rychlost růstu $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}_{|a_0}$ funkce f v bodě a_0 ve směru vektoru $\mathbf{v}$ je dána

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}_{|a_0} = \mathrm{grad} f_{|a_0} \cdot \mathbf{v} = (e\frac{\sqrt{2}}{2}, e\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (-1, 2) = e\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3.3 Najděte jednotkový směr největšího růstu funkce $f(x, y, z) = xe^y + z^2$ v bodě $a_0 = (1, \ln 2, \frac{1}{2})$.

Řešení:

$$\mathrm{grad} f_{|a_0} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})_{|a_0} = (e^y, xe^y, 2z)_{|a_0} = (2, 2, 1)$$

Jednotkový směr největšího růstu funkce f v bodě a_0 je

$$\frac{1}{||\mathrm{grad} f_{|a_0}||} \cdot \mathrm{grad} f_{|a_0} = \frac{1}{||(2, 2, 1)||} \cdot (2, 2, 1) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}).$$

3.4 Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ v bodě $a_0 = (1, 1)$.

Řešení:
Graf funkce f je $\{(a, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(a)\}$. Tečná rovina $T_{(a_0, f_{a_0})}$ ke grafu f v bodě $(a_0, f_{a_0}) = (1, 1, 3)$ je dána rovnicí

$$z = f(a_0) + \mathrm{grad} f_{|a_0} \cdot (a - a_0).$$

Máme $\mathrm{grad} f_{|a_0} = (4x, 2y)_{|a_0} = (4, 2)$, tedy tečná rovina má rovnici

$$z = 3 + (4, 2) \cdot (x - 1, y - 1) = 3 + 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

neboli

$$4x + 2y - z = 3.$$