4. cvičení z Matematiky 2

9.-13. března 2015

4.1 Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $x^2+2y^2+z^2=1$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho: 4x+2y+z=0$.

Řešení:
Použijeme následující větu (důsledek věty o implicitní funkci):

Věta: Nechť G je otevřená množina v $\mathbb{R}^n$, $f: G \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na G. Nechť bod $u_0 \in G$ je takový, že $f(u_0)=0$ a $f'(u_0) \neq 0$. Pak tečná rovina k nadploše (tzv. *varietě*)

$$M = \{u \in G \mid f(u)=0 \;\;\&\;\; f'(u_0) \neq 0\}$$

v bodě u_0 má rovnici

$$f'(u_0)(u-u_0)=0.$$

V našem případě je $f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$ a $G=\mathbb{R}^3$. Protože pro $u_0=(x,y,z)$ je derivace $f'(u_0)=\operatorname{grad}(f)_{|u_0}=(2x,4y,2z)$ nulová pouze pro $u_0=(0,0,0)$ (a $f(0,0,0)=-1\neq 0$) můžeme použít uvedenou větu a normálový vektor tečné roviny v bodě $u_0 \in M$ je právě $\operatorname{grad}(f)_{|u_0}$. Tato rovina bude rovnoběžná s ρ, která má normálový vektor $\mathbf{n}_\rho=(4,2,1)$, právě když $(2x,4y,2z)=\operatorname{grad}(f)_{|u_0}=\lambda\cdot\mathbf{n}_\rho=\lambda\cdot(4,2,1)$ pro nějaké $\lambda\in\mathbb{R}$, tedy $(x,y,z)=(2\lambda,\lambda/2,\lambda/2)$. Současně má také platit, že $x^2+2y^2+z^2=1$. Po dosazení pak dostaneme $(2\lambda)^2+2(\lambda/2)^2+(\lambda/2)^2=1$ tedy $\lambda=\pm 2/\sqrt{19}$.

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor $\mathbf{n}_\rho$, tedy rovnici $4x+2y+z=c$, kde neznámé hodnoty $c\in\mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $u_0=\pm\frac{1}{\sqrt{19}}\cdot(4,1,1)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x+2y+z=\sqrt{19}$$

a

$$4x+2y+z=-\sqrt{19}.$$

4.2 Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$, která vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách.

Řešení:
Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu: $f(x,y,z)=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}-1$, $G=\mathbb{R}^3$ a normálový vektor musí být $\mathbf{n}=(1,1,1)$. Tedy

$$\left(\frac{2x}{25},\frac{2y}{16},\frac{2z}{9}\right)=\operatorname{grad}(f)_{|u_0}=\lambda\cdot\mathbf{n}=\lambda\cdot(1,1,1)$$

pro nějaké $\lambda\in\mathbb{R}$. Dostáváme $\lambda=\pm 2/\sqrt{25}$ a tečné roviny jsou

$$x+y+z=5\sqrt{2}$$

a

$$x+y+z=-5\sqrt{2}.$$

4.3 Najděte úhel sevřený dvěma plochami

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8 \quad \text{a} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$$

v bodě $a_0 = (2, 0, 2)$.

Řešení:
Úhel sevřený dvěma rovinami je roven úhlu, který svírají přímky určené normálovými vektory těchto rovin. Podle předchozího je tedy

$$\mathbf{n}_1 = (2x, 2y, 2z)_{|a_0} = (4, 0, 4)$$

a

$$\mathbf{n}_2 = \Big(2(x-1), 2(y-2), 2(z-3)\Big)_{|a_0} = (2, -4, -2).$$

Pro hledaný úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ pak je

$$\cos\alpha = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{||\mathbf{n}_1|| \cdot ||\mathbf{n}_2||} = 0$$

takže $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

4.4 Najděte derivaci složené funkce $f \circ g$, kde

(i) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(s,t) = \begin{pmatrix} st \\ s\cos t \\ s\sin t \end{pmatrix}$ a $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$,

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(s,t) = \begin{pmatrix} st \\ e^{st} \\ t^2 \end{pmatrix}$ a $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + yz + zx$.

Řešení:
(i) Můžeme buď vyjádřit funkci $h(s,t) = (f \circ g)(s,t) = (st)^2 + (s\sin t)^2 + (s\cos t)^2 = s^2t^2 + s^2$ a tu zderivovat

$$h'(s,t) = \Big(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\Big) = (2st^2 + 2s, 2s^2t)$$

nebo použít větu o derivaci složené funkce:

$$h'(s,t) = (f \circ g)'(s,t) = f'(g(s,t)) \circ g'(s,t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}_{|g(s,t)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial s} & \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial s} & \frac{\partial g_2}{\partial t} \\ \frac{\partial g_3}{\partial s} & \frac{\partial g_3}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x, & 2y, & 2z \end{pmatrix}_{|g(s,t)} \cdot \begin{pmatrix} t & s \\ \cos t & -s\sin t \\ \sin t & s\cos t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2st, & 2s\cos t, & 2s\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & s \\ \cos t & -s\sin t \\ \sin t & s\cos t \end{pmatrix} = (2st^2 + 2s, 2s^2t)$$

kde $g_i(s,t)$ jsou jednotlivé složky zobrazení g. Přitom je třeba při derivování f mít stejně (zvolené) pořadí proměnných jako je pak pořadí jednotlivých složek g_i v matici derivace zobrazení g (tedy např.

pokud bychom derivovali v pořadí podle y, z, x pak pořadí složek v matici derivace g bude odshora postupně g_2, g_3 a g_1.) Změna pořadí jen odpovídá tomu, že si matici derivace zvolíme v jiné bázi.

(ii) Postupujeme podobně: $h(s,t) = (f \circ g)(s,t) = ste^{st} + t^2e^{st} + st^3$

$$h'(s,t) = \left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right) = \left((t + st^2 + t^3)e^{st} + t^3, (s + s^2t + 2t + st^2)e^{st} + 3st^2\right)$$

nebo

$$h'(s,t) = f'(g(s,t)) \circ g'(s,t) = \begin{pmatrix} y+z, & z+x, & x+y \end{pmatrix}_{|g(s,t)} \cdot \begin{pmatrix} t & s \\ te^{st} & se^{st} \\ 0 & 2t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{st}+t^2, & st+t^2, & e^{st}+st \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & s \\ te^{st} & se^{st} \\ 0 & 2t \end{pmatrix} =$$

$$= \left((t + st^2 + t^3)e^{st} + t^3, (s + s^2t + 2t + st^2)e^{st} + 3st^2\right).$$

4.5 Najděte Taylorův polynom druhého stupně pro funkci f v okolí bodu a_0:

(i) $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $a_0 = (1,2,1)$,

(ii) $f(x,y,z) = xe^y \cos z$, $a_0 = (0,0,0)$.

Řešení:

(i) Taylorův polynom stupně (nejvýše) 2, který aproximuje funkci f v bodě a_0, je dán vztahem:

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = f(a_0) + f'(a_0)\mathbf{h} + \frac{1}{2!}f''(a_0)(\mathbf{h},\mathbf{h})$$

kde $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$. Máme

$$f'(a_0) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)_{|a_0} = (4, 4, 12)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 12 \\ 12 & 12 & 24 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = 4 + (4,4,12)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1,h_2,h_3)\begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 12 \\ 12 & 12 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 4 + 4h_1 + 4h_2 + 12h_3 + 4h_1h_2 + 12h_1h_3 + h_2^2 + 12h_2h_3 + 12h_3^2.$$

Polynom lze v tomto případě také získat přímo dosazením do původní funkce, kde si v rozvoji vezmeme pouze členy do stupně nejvýše 2:

$$f(1+h_1, 2+h_2, 1+h_3) = (1+h_1)(2+h_2)^2(1+h_3)^3 = (1+h_1)(4+4h_2+h_2^2)(1+3h_3+3h_3^2+h_3^3) =$$

$$= 4 + 4h_1 + 4h_2 + 12h_3 + 4h_1h_2 + 12h_1h_3 + h_2^2 + 12h_2h_3 + 12h_3^2 + \text{vyšší členy}.$$

(ii) Podobně dostaneme:

$$f'(a_0) = (e^y \cos z, xe^y \cos z, -xe^y \sin z)_{|a_0} = (1, 0, 0)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & e^y \cos z & -e^y \sin z \\ e^y \cos z & xe^y \cos z & -xe^y \sin z \\ -e^y \sin z & -xe^y \sin z & -xe^y \cos \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = h_1 + h_1 h_2.$$

Polynom lze i v tomto případě také získat rozvojem jednotlivých funkcí jedné proměnné v daných bodech:

$$e^{h_2} = 1 + h_2 + \varphi(h_2)$$

$$\cos h_3 = 1 + \psi(h_3)$$

kde $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$ a $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{t} = 0$.

$$f(0 + h_1, 0 + h_2, 0 + h_3) = h_1 e^{h_2} \cos h_3 = h_1 \Big(1 + h_2 + \varphi(h_2)\Big)\Big(1 + \psi(h_3)\Big) =$$

$$= h_1 + h_1 h_2 + \Omega(\mathbf{h})$$

kde $\Omega(\mathbf{h}) = h_1\varphi(h_2) + (h_1 + h_1 h_2 + h_1\varphi(h_2))\psi(h_3)$.

Ukážeme, že platí $\lim\limits_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\Omega(\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||^2} = 0$ a tedy jsme skutečně tímto způsobem našli hledaný Taylorův polynom:

$$\frac{|\Omega(\mathbf{h})|}{||\mathbf{h}||^2} \leq \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|}\frac{|h_1 h_2|}{||\mathbf{h}||^2} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|}\frac{|h_1 h_3|}{||\mathbf{h}||^2} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|}\frac{|h_1 h_2 h_3|}{||\mathbf{h}||^2} + \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|}\frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|}\frac{|h_1 h_2 h_3|}{||\mathbf{h}||^2} \leq$$

$$\leq \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|}||\mathbf{h}|| + \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|}\frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|}||\mathbf{h}|| \to 0$$

pro $\mathbf{h} \to 0$, protože $|h_i| \leq ||\mathbf{h}||$ pro všechna $i = 1, 2, 3$. Uvedené odhady platí i když je náhodou $h_i = 0$ pro nějaké $i = 1, 2, 3$.