5. cvičení z Matematiky 2

16.-20. března 2015

5.1 Ortogonální transformací převeďte homogenní kvadratický polynom (tedy kvadratickou formu) $g(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$ na diagonální tvar.

Řešení:
(i) Matice $(g)_{\mathcal{B}}$ kvadratické formy g v dané bázi $\mathcal{B}$ je jednoznačně určena vztahem

$$g(u) = (u)_{\mathcal{B}}^T \cdot (g)_{\mathcal{B}} \cdot (u)_{\mathcal{B}}$$

pro všechna $u \in V$, kde $(u)_{\mathcal{B}}$ je souřadnicový zápis vektoru u v bázi $\mathcal{B}$.

Ve standardní bázi $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ (tj. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) pro $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tedy máme $(u)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a

$$g(u) = (x,y) \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

takze $\mathbb{A} = (g)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Novou ortonormální bázi, ve které bude mít g diagonální tvar, najdeme jako vlastní (normované) vektory matice $\mathbb{A}$. Tedy potřebujeme spočítat kořeny polynomu $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9$. Tedy $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 8$. Po dosazení pak pro $\lambda_1 = 2$ je vlastní (normovaný) vektor např. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pro $\lambda_2 = 8$ je vlastní (normovaný) vektor např. $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a hledaná ortonormální báze je $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$. Matice přechodu $\mathbb{M} = {}_{\mathcal{E}}(id)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{E}$ je pak ortogonální, tedy $\mathbb{M}\mathbb{M}^T = \mathbb{E} = \mathbb{M}^T\mathbb{M}$ a $\mathbb{M}^{-1} = \mathbb{M}^T$. V nové bázi $\mathcal{B}$ má matice formy g diagonální tvar $(g)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. To můžeme ověřit např. i takto: pro přechod mezi souřadnicemi vektoru u v různých bázích máme vztah $(u)_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}(id)_{\mathcal{B}} \cdot (u)_{\mathcal{B}} = \mathbb{M} \cdot (u)_{\mathcal{B}}$ a ten dosadíme do vyjádření formy

$$g(u) = (u)_{\mathcal{E}}^T (g)_{\mathcal{E}} (u)_{\mathcal{E}} = \Big(\mathbb{M} \cdot (u)_{\mathcal{B}}\Big)^T (g)_{\mathcal{E}} \Big(\mathbb{M} \cdot (u)_{\mathcal{B}}\Big) = (u)_{\mathcal{B}}^T \Big(\mathbb{M}^T (g)_{\mathcal{E}} \mathbb{M}\Big) (u)_{\mathcal{B}}$$

tedy v bázi $\mathcal{B}$ má forma matici

$$(g)_{\mathcal{B}} = \mathbb{M}^T (g)_{\mathcal{E}} \mathbb{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(ii) Pokud by nás zajímalo nalezení jakékoliv báze (ne nutně ortogonální), ve které bude mít forma diagonální matici (tzv. *polární* báze) můžeme postupovat doplňováním na čtverec (tj. použijeme vzorec $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$):

$$g(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 5\Big(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{5}y + (\frac{3}{5}y)^2\Big) - 5(\frac{3}{5}y)^2 + 5y^2 = 5\Big(x - \frac{3}{5}y\Big)^2 + \frac{16}{5}y^2$$

V nových souřadnicích $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ odpovídajících nové bázi $\mathcal{B}'$ má tedy forma tvar

$$g(x', y') = 5(x')^2 + \frac{16}{5}(y')^2$$

a proto je pozitivně definitní. Příslušná matice přechodu ${}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pak ale není ortogonální - matice se odvodí ze vztahu

$${}_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{E}} \cdot (u)_{\mathcal{E}} = (u)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (u)_{\mathcal{E}}$$

pro všechna $u \in \mathbb{R}^2$.

(iii) K pouhé definitnosti pak také stačí ověřit podmínky Sylvestrova kritéria (tj. znaménka hlavních subdeterminantů matice $\mathbb{A} = (g)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$):

$\Delta_1 = 5 > 0$

$\Delta_2 = 5 \cdot 5 - (-3) \cdot (-3) = 16 > 0$

Tedy forma g je pozitivně definitní.

5.2 Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(i) $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

(ii) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

Řešení:

(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'_{|(x,y)} = (3x^2 - 2y, -3y^2 - 2x)$$

Tedy $f'_{|(x,y)} = 0$ právě když $3x^2 = 2y$ a $-3y^2 = 2x$, což je právě když $(x, y) = (0, 0)$ nebo $(x, y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''_{|(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & -6y \end{pmatrix}$$

Pro $(x, y) = (0, 0)$ je $f''_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je $f''_{|(0,0)}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = -4h_1h_2$ a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0, 0)$ je tedy sedlo.

Pro $(x, y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ je $f''_{|(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -4 < 0$, $\Delta_2 = 16 - 4 = 12 > 0$) je forma negativně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) maximum. Toto maximum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení $f(x, 0) = x^3 + 6$).

(ii) Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu:

$$f'_{|(x,y)} = (4x + 3y - 5, 3x + 8y + 2)$$

Tedy $f'_{|(x,y)} = 0$ právě když $(x, y) = (2, -1)$. Druhá derivace

$$f''_{|(x,y)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

je podle Sylvestrova kritéria pozitivně definitní, tedy v $(2,-1)$ je (ostré) lokální minimum $f(2,-1) = -6$. Toto minimum je ve skutečnosti i globální, což plyne buď z klasifikace všech možných grafů polynomů stupně nejvýše dva o dvou proměnných (jde o speciální případ tzv. *kvadrik*) a nebo si pomůžeme opět doplněním na čtverec:

$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y =$$
$$= 2\Big(x^2 + 2\cdot x\cdot \frac{3}{4}y + 2\cdot x\cdot(-\frac{5}{4}) + 2\cdot\frac{3}{4}y\cdot(-\frac{5}{4}) + (\frac{3}{4}y)^2 + (-\frac{5}{4})^2\Big) + \frac{15}{4}y - \frac{9}{8}y^2 - \frac{25}{8} + 4y^2 + 2y =$$
$$= 2\Big(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}\Big)^2 + \frac{23}{8}y^2 + \frac{23}{4}y - \frac{25}{8} = 2\Big(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}\Big)^2 + \frac{23}{8}(y+1)^2 - 6$$

Tedy skutečně $f(x,y) \geq -6$ a rovnost nastává pro $x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4} = 0$ a $y+1=0$ neboli $(x,y) = (2,-1)$.

Poznámka:

Obecně můžeme použít i následující přístup: Každý polynom f v proměnných $x_1,\dots,x_n$ stupně nejvýše dva můžeme pro $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)^T$ vyjádřit jako

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbb{A}\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$$

pro vhodnou symetrickou matici $\mathbb{A}$, vektor $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ a $c\in\mathbb{R}$.

Předpokládejme nyní, že $f'_{|\mathbf{x}_0} = 0$ pro nějaké $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Pro derivace obecně máme:

$$f'_{|\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T\mathbb{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbb{A}\mathbf{h} + 2\mathbf{b}^T\mathbf{h} = 2(\mathbf{x}^T\mathbb{A} + \mathbf{b}^T)\mathbf{h}$$

$$f''_{|\mathbf{x}}(\mathbf{h},\mathbf{k}) = 2\mathbf{h}^T\mathbb{A}\mathbf{k}$$

Tedy $f'_{|\mathbf{x}_0} = 0$ právě když $\mathbf{x}_0^T\mathbb{A} + \mathbf{b}^T = 0^T$, tj. $\mathbb{A}\mathbf{x}_0 = -\mathbf{b}$. Posunutím souřadnic pak dostaneme tvar:

$$f(\mathbf{y}+\mathbf{x}_0) = (\mathbf{y}+\mathbf{x}_0)^T\mathbb{A}(\mathbf{y}+\mathbf{x}_0) + 2\mathbf{b}^T(\mathbf{y}+\mathbf{x}_0) + c =$$
$$= \mathbf{y}^T\mathbb{A}\mathbf{y} + 2\mathbf{y}^T\mathbb{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^T\mathbb{A}\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{b}^T\mathbf{y} + 2\mathbf{b}^T\mathbf{x}_0 + c =$$
$$= \mathbf{y}^T\mathbb{A}\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T\mathbf{b} - \mathbf{x}_0^T\mathbf{b} + 2\mathbf{b}^T\mathbf{y} + 2\mathbf{b}^T\mathbf{x}_0 + c =$$
$$= \mathbf{y}^T\mathbb{A}\mathbf{y} - \mathbf{x}_0^T\mathbb{A}\mathbf{x}_0 + c.$$

Protože matice druhé derivace je $f''_{|\mathbf{x}} = 2\mathbb{A}$, tak pokud je tato forma pozitivně definitní, pak $\mathbf{y}^T\mathbb{A}\mathbf{y} \geq 0$, tedy

$$f(\mathbf{y}+\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}^T\mathbb{A}\mathbf{y} - \mathbf{x}_0^T\mathbb{A}\mathbf{x}_0 + c \geq -\mathbf{x}_0^T\mathbb{A}\mathbf{x}_0 + c$$

a rovnost nastává právě pro $\mathbf{y} = 0$. Tedy v bodě $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ je ostré globální minimum a $f(\mathbf{x}_0) = -\mathbf{x}_0^T\mathbb{A}\mathbf{x}_0 + c$.

V našem případě máme:

$$f(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\Big(-\frac{5}{2}, 1\Big)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

takže $\mathbf{x}_0 = -\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{23}\begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ jak už víme.