6. cvičení z Matematiky 2

23.-27. března 2015

6.1 Najděte extrémy funkce $f(x,y,z) = x - y + 3z$ s vazebnou podmínkou $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$.

Řešení:
Použijeme věty:

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina $k \leq n$ a $f : U \to \mathbb{R}$ a $\Phi : U \to \mathbb{R}^k$ jsou spojitě diferencovatelná zobrazení na U. Položme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0 \ \& \ \Phi'_{|a} \text{ je regulární}\}.$$

Jestliže $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M, pak existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplikátory*), že

$$f'(a_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g'_i(a_0),$$

kde g_i jsou jednotlivé složky zobrazení Φ, tj. $\Phi(a) = (g_1(a), \ldots, g_k(a))$.

(*Regularita* derivace znamená, že její matice má maximální možnou hodnost, tedy hodnost k, tj. její řádky jsou lineárně nezávislé. Množina M se pak nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet k nezávislých vazeb daných zobrazením Φ.)

V našem případě můžeme položit $U = \mathbb{R}^3$ a $\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$. Protože

$$\Phi'_{|(x,y,z)} = (2x, 2y, 8z)$$

tak $\Phi'_{|(x,y,z)}$ není regulární (tj. v tomto případě $\Phi'_{|(x,y,z)} = 0$) právě když $(x,y,z) = (0,0,0)$. Nemůže se tedy stát, aby $\Phi(x,y,z) = 0$ a $\Phi'_{|(x,y,z)} = 0$. Takže v každém bodě množiny $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$ je $\Phi'_{|(x,y,z)}$ regulární. Pro bod $a = (x,y,z) \in M$ lokálního extrému f na M teď existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1, -1, 3) = f'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda(2x, 2y, 8z)$$

a

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 4.$$

Dostáváme $a = \pm \frac{2}{\sqrt{17}}(4, -4, 3)$. Protože f nabývá extrému na M (neboť M je omezená a uzavřená), jsou uvedené body skutečně (absolutní) extrémy a funkční hodnoty jsou $f(a) = \pm 2\sqrt{17}$.

6.2 Kruhový talíř o rovnici $x^2 + y^2 \leq 1$ je zahřátý na teplotu $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.

Řešení:

Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladu. Vyšetření extrému T na uzavřené a omezené množině $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ rozdělíme na případ otevřené množiny

$$A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

a případ vázaného extrému

$$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Jestliže $a = (x,y) \in A^\circ$ je extrém T na A, pak je i extrémem T na A°. Takže musí platit, že

$$T'_{|a} = (2x - 1, 4y) = 0$$

tedy $a = (\frac{1}{2}, 0)$ a skutečně je pak $a \in A^\circ$.

Jestliže $a = (x,y) \in \partial A$ je extrém T na A, pak je i (vázaným) extrémem T na $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(x,y) = 0\}$, kde $\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Musí tedy existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2x - 1, 4y) = T'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda(2x, 2y)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Dostáváme $a = \pm(1,0)$ nebo $a = (-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Teď víme, že jedinými možnými kandidáty na extrémy jsou body

$$(\frac{1}{2}, 0),\ (1,0),\ (-1,0),\ (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ a } (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Protože T nabývá na A extrému, porovnáním funkčních hodnot

$$T(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4},\ T(1,0) = 0,\ T(-1,0) = 2,\ T(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{9}{4} = T(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

zjistíme, že T nabývá minima v $(\frac{1}{2}, 0)$ a maxima v $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.

6.3 Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na množině $|x| + |y| \leq 1$.

Řešení:
Množina $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ je čtverec. Příklad opět rozdělíme na vyšetření otevřené množiny $A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$ a vázaného extrému na množině $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$, kterou ale tentokrát nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou čtyři otevřené úsečky (hrany čtverce) a čtyři body (vrcholy čtverce). Procházení těchto možností si usnadníme použitím symetrií $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takových, že $\varphi(\partial A) = \partial A$ a $f \circ \varphi = f$.

Můžeme si zvolit tyto tři (neidentické) symetrie:

$$(x,y) \mapsto (-x, -y)$$

$$(x,y) \mapsto (y, x)$$

$$(x,y) \mapsto (-y, -x)$$

Extrém na A°:

$f'_{|a} = (2x - y, 2y - x) = 0$ nastává právě pro $a = (0,0) \in A^\circ$ s hodnotou $f(0,0) = 0$.

Extrém na ∂A:

Díky symetriím stačí vyšetřit extrém na

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\} \text{ s vazbou } \Phi_1(x, y) = x + y - 1$$

a na

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y < 0\} \text{ s vazbou } \Phi_2(x, y) = x - y - 1$$

tj. hrany čtverce A bez koncových bodů (a dále už pak jen vrchol $(1, 0)$ čtverce A jako samostatnou vazbu).

Pro extrém na U_1 má tedy existovat $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, že

$$(2x - y, 2y - x) = f'_{|a} = \lambda_1 \Phi'_{1|a} = \lambda_1(1, 1)$$

a

$$x + y = 1,$$

tedy $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in U_1$ a $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Podobně pro extrém na U_2 má existovat $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, že

$$(2x - y, 2y - x) = f'_{|a} = \lambda_2 \Phi'_{2|a} = \lambda_2(1, -1)$$

a

$$x - y = 1,$$

tedy $(x, y) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \in U_2$ a $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

Zbývá bod $(1, 0)$ s hodnotou $f(1, 0) = 1$.

Minimum tedy nabývá funkce v bodě $(0, 0)$ a maximum ve vrcholech čtverce (které jsme získali z bodu $(1, 0)$ pomocí symetrií).

6.4 Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.

Řešení:

Hledáme sice jen kladná čísla, ale výhodnější je přejít k uzavřené množině, tj. uvažovat nezáporná řešení. Budeme hledat body maxima funkce

$$f(x, y, z) = xyz$$

na množině

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0 \ \&\ x + y + z = 100\},$$

(což je trojúhelník i s okraji) protože tato množina je uzavřená a omezená.

Vyšetření rozdělíme na obvyklý vázaný extrém v otevřené množině

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\},$$

tedy na $A \cap U = \{(x, y, z) \in U \mid \Phi(x, y, z) = 0\}$ s vazbou $\Phi(x, y, z) = x + y + z - 100$ (trojúhelník bez okrajů) a na případ $A \setminus U$ (okraje trojúhelníka).

Na okrajích trojúhelníka je funkce f nulová a zřejmě tu nabývá svého minima (na zbytku množiny A je f nenulová).

Pro bod extrému $a = (x, y, z) \in A \cap U$ pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, xz, xy) = f'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda(1, 1, 1)$$

a

$$x + y + z = 100,$$

takže $a = \frac{100}{3}(1,1,1)$ a $f(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}) = (\frac{100}{3})^3$ a tento bod je tak jediným bodem maxima funkce f na A.