7. cvičení z Matematiky 2

30. března - 3. dubna 2015

7.1 Změňte pořadí integrace následujících integrálů:

(i) $\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx$

(ii) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x,y)\ dy\ dx + \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx$

Řešení:
Použijeme **Fubiniho větu:** Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace a $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilní funkce (např. spojitá). Pak

$$\int\limits_{\pi_2(D)} \Big(\int\limits_{(\mathbb{R}\times\{y\})\cap D} f(x,y)\ dx \Big)\ dy = \int\int\limits_D f\ dS = \int\limits_{\pi_1(D)} \Big(\int\limits_{(\{x\}\times\mathbb{R})\cap D} f(x,y)\ dy \Big)\ dx,$$

kde $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé osy, tedy $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$.

(i) Základní oblast integrace je

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \pi\ \&\ 0 \le y \le \sin x\}.$$

Máme

$$\pi_1(D) = \langle 0, \pi \rangle$$

a

$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap D = \langle 0, \sin x \rangle.$$

Po výměně pořadí integrace máme

$$\pi_2(D) = \langle 0, 1 \rangle$$

a pro řezy ve směru osy x z nerovnosti $y \le \sin x$ odvodíme:

$$\arcsin y \le \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x & , \ x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x & , \ x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \end{cases}$$

(protože pro $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ a $x' = \pi - x$ máme $x' \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle$ a tedy

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x')) = \arcsin(\sin x') = x' = \pi - x.)$$

Takže dostáváme $\arcsin y \le x \le \pi - \arcsin y$, tudíž

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle \arcsin y, \pi - \arcsin y \rangle.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx = \int\limits_0^1 \int\limits_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

(ii) Základní oblast integrace je

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ \&\ 0 \leq y \leq x\} \cup$$

$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \ \&\ 0 \leq y \leq 2-x\}.$$

Takže $\pi_2(D) = \langle 0,1 \rangle$ a $(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle y, 2-y \rangle$. Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\ dy\ dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_y^{2-y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

7.2 Určete vhodné pořadí integrace a spočítejte integrál:

(i) $\int\limits_0^2 \int\limits_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dy\ dx$

(ii) $\int\limits_0^8 \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\ dx}{y^4+1}$

Řešení:
(i) Pro výpočet integrálu bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \ \&\ 0 \leq y \leq 4-x^2\},$$

takže

$$\pi_2(D) = \langle 0,4 \rangle$$

a

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle 0, \sqrt{4-y} \rangle.$$

Dostáváme tak

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dy\ dx = \int_0^4 \Big(\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dx \Big)\ dy = \int_0^4 \Big[\frac{x^2 e^{2y}}{2(4-y)} \Big]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y}} dy =$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy = \Big[\frac{e^{2y}}{4} \Big]_{y=0}^{y=4} = \frac{e^8 - 1}{4}.$$

(ii) Opět bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 8 \ \&\ \sqrt[3]{x} \leq y \leq 2\},$$

takže

$$\pi_2(D) = \langle 0,2 \rangle$$

a

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle 0, y^3 \rangle.$$

Dostáváme tak

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\ dx}{y^4+1} = \int_0^2 \Big(\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\ dx \Big)\ dy = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} dy =$$

$$= \Big[\frac{\ln(y^4+1)}{4} \Big]_{y=0}^{y=2} = \frac{\ln 17}{4}.$$

7.3 Vypočítejte integrál

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\ dx\ dy$$

přechodem do polárních souřadnic.

Řešení:
Základní oblast integrace je

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2\ \&\ 0 \le x \le \sqrt{4-y^2}\} =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x, y\ \&\ x^2+y^2 \le 4\},$$

tedy čtvrtkruh.

Použijeme **Větu o substituci:** Nechť $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ jsou oblasti integrace, $\Phi : U \to V$ je prosté spojitě diferencovatelné zobrazení na U a $f : U \to \mathbb{R}$ integrabilní funkce. Pak

$$\int \int_{\Phi(U)} f\ dS = \int \int_U (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|\ dS.$$

Polární souřadnice jsou určeny zobrazením

$\Phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, kde $\Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ (abychom zachovali prostotu Φ, upravili jsme definiční obor tohoto zobrazení). Máme $\Phi'_{|(r,\varphi)} = \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$ a $\det \Phi'_{|(r,\varphi)} = r$. Parametrizovat teď nebudeme celé D, ale jen

$$D^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, y\ \&\ x^2+y^2 < 4\}$$

(což na integrál nebude mít vliv). Tedy $D^\circ = \Phi(U)$ pro $U = (0,2) \times (0, \frac{\pi}{2})$. Celkem dostáváme:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\ dx\ dy = \int \int_D (x^2+y^2)\ dS = \int \int_{D^\circ = \Phi(U)} (x^2+y^2)\ dS =$$

$$= \int \int_U r^2 \cdot r\ dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^2 r^3\ dr \Big)\ d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\frac{r^4}{4} \Big]_{r=0}^{r=2}\ d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\ d\varphi = 2\pi.$$

7.4 Vypočítejte integrál

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\ dS$$

použitím polárních souřadnic, kde D je ohraničeno křivkou $r = 1 + \cos\varphi$.

Řešení:
V polárních souřadnicích (viz předchozí příklad) je oblast dána jako

$$U = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \varphi < 2\pi \ \&\ 0 < r < 1 + \cos\varphi\}$$

(hranici opět není potřeba uvažovat), tedy $D^\circ = \Phi(U)$. Použitím věty o substituci dostaneme

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\ dS = \iint\limits_{D^\circ=\Phi(U)} \sqrt{x^2+y^2}\ dS = \iint\limits_U r \cdot r\ dS =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \Big(\int\limits_0^{1+\cos\varphi} r^2\ dr \Big)\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_{r=0}^{r=1+\cos\varphi}\ d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^3\ d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} (\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos\varphi + 1)\ d\varphi = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi.$$

Pro jednotlivé integrály jsme použili vztah

$$C_n := \int\limits_0^{2\pi} \cos^n\varphi\ d\varphi = [\cos^{n-1}\varphi \cdot \sin\varphi]_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} (n-1)\cos^{n-2}\varphi \cdot (-\sin^2\varphi)\ d\varphi =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{2\pi} \cos^{n-2}\varphi \cdot (1-\cos^2\varphi)\ d\varphi = (n-1)C_{n-2} - (n-1)C_n,$$

kde $n \geq 2$. Tedy máme $C_n = \frac{n-1}{n}C_{n-2}$ a $C_3 = C_1 = 0$ a $C_2 = \frac{1}{2}2\pi = \pi$.