8. cvičení z Matematiky 2

6. dubna - 10. dubna 2015

8.1 Najděte hmotnost a polohu těžiště

(i) trojúhelníku s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$, $(4,0)$, jehož hustota je rovna $\rho(x,y) = x$.

(ii) části roviny ohraničené parabolou $y = 9 - x^2$ a osou x, jejíž hustota je rovna $\rho(x,y) = y$.

Řešení:

(i) Oblast integrace je $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1 \;\&\; y \le x \le 4 - 3y\}$. Jednotlivé integrály tedy jsou hmotnost:

$$m = \int\int_E \rho \; dS = \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} x \; dx \Big) \; dy = \int_0^1 \Big[\frac{x^2}{2} \Big]_{x=y}^{x=4-3y} \; dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (3y-4)^2 - y^2 \; dy = \frac{1}{2} \Big[\frac{(3y-4)^3}{9} - \frac{y^3}{3} \Big]_0^1 = \frac{10}{3}$$

x-ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m} \int\int_E x\rho(x,y) \; dS = \frac{3}{10} \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} x^2 \; dx \Big) \; dy = \frac{1}{10} \int_0^1 \Big[x^3 \Big]_{x=y}^{x=4-3y} \; dy =$$

$$= \frac{1}{10} \int_0^1 (4-3y)^3 - y^3 \; dy = \Big[-\frac{(4-3y)^4}{120} - \frac{y^4}{40} \Big]_0^1 = \frac{21}{10}$$

y-ová souřadnice těžiště:

$$T_2 = \frac{1}{m} \int\int_E y\rho(x,y) \; dS = \frac{3}{10} \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} xy \; dx \Big) \; dy = \frac{3}{20} \int_0^1 \Big[x^2 y \Big]_{x=y}^{x=4-3y} \; dy =$$

$$= \frac{3}{20} \int_0^1 y(4-3y)^2 - y^3 \; dy = \frac{12}{5} \int_0^1 y^3 - 3y^2 + 2y \; dy = \frac{12}{5} \Big[\frac{y^4}{4} - y^3 + y^2 \Big]_0^1 = \frac{3}{5}.$$

(ii) Oblast integrace je $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \le x \le 3 \;\&\; 0 \le y \le 9 - x^2\}$.
hmotnost:

$$m = \int\int_E \rho \; dS = \int_{-3}^{3} \Big(\int_0^{9-x^2} y \; dy \Big) \; dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^{3} \Big[y^2 \Big]_0^{9-x^2} \; dx = \int_0^3 (x^2 - 9)^2 \; dx =$$

$$= \Big[\frac{x^5}{5} - 6x^3 + 81y \Big]_0^3 = \frac{648}{5}$$

x-ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m}\int\int_E x\rho(x,y)\ dS = \frac{1}{m}\int_{-3}^{3} x\Big(\int_0^{9-x^2} y\ dy\Big)\ dx = 0$$

(je to lichá funkce na množině symetrické podle osy y)

y-ová souřadnice těžiště:

$$T_2 = \frac{1}{m}\int\int_E y\rho(x,y)\ dS = \frac{1}{m}\int_{-3}^{3}\Big(\int_0^{9-x^2} y^2\ dy\Big)\ dx = \frac{1}{3m}\int_{-3}^{3}\Big[y^3\Big]_0^{9-x^2}\ dx =$$

$$= \frac{2}{3m}\int_0^3 (3^2-x^2)^3\ dx = \frac{5}{3\cdot 324}\Big[3^6x - 3^4x^3 + \frac{3^3}{5}x^5 - \frac{x^7}{7}\Big]_0^3 = \frac{36}{7}.$$

8.2 Použijte substituci $u = x + 2y$, $v = x - y$ pro výpočet integrálu

$$\int_0^{\frac{2}{3}}\int_y^{2-2y}(x+2y)e^{y-x}\ dx\ dy.$$

Řešení:
Oblast integrace je $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \frac{2}{3}\ \&\ y \le x \le 2-2y\}$. Jde o trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ a $(2,0)$. Substituce Φ je lineární zobrazení, které je zadáno svou inverzí, tedy

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Phi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Trojúhelník lze vyjádřit jako tzv. *konvexní obal* ze svých vrcholů (tj. nejmenší konvexní množinu, která obsahuje dané vrcholy - pro body $A_1,\dots,A_n$ je konvexní obal $[A_1,\dots,A_n]_\alpha$ dán jako

$$[A_1,\dots,A_n]_\alpha = \{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i \mid 0 \le \lambda_1,\dots,\lambda_n\ \&\ \sum_{i-1}^{n}\lambda_i = 1\}).$$

Protože (prosté) lineární zobrazení Φ konvexní obaly zachovává, je množina U taková, že $\Phi(U) = E$, daná také jako konvexní obal z vrcholů

$$\Phi^{-1}(0,0) = (0,0)$$
$$\Phi^{-1}\Big(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\Big) = (2,0)$$
$$\Phi^{-1}(2,0) = (2,2).$$

Tedy $U = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 \le v \le u\ \&\ 0 \le u \le 2\}$. Dale je $(\Phi^{-1})' = (\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix})$, $\det\Phi' = \frac{1}{\det(\Phi^{-1})'} = -\frac{1}{3}$. Po substituci pak máme

$$\int_0^{\frac{2}{3}}\int_y^{2-2y}(x+2y)e^{y-x}\ dx\ dy = \int\int_{E=\Phi(U)}(x+2y)e^{y-x}\ dS = \int\int_U ue^{-v}\cdot\frac{1}{3}\ dS =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2\int_0^u ue^{-v}\ dv\ du = \frac{1}{3}\int_0^2 u\Big[-e^{-v}\Big]_{v=0}^{v=u}\ du = \frac{1}{3}\int_0^2 u(1-e^{-u})\ du = \frac{1}{3}\Big[\frac{u^2}{2}+(u+1)e^{-u}\Big]_0^2 =$$

$$= 1 + e^{-2}.$$

8.3 Vypočtěte

$$\iiint_E y\ dV,$$

kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$ a leží nad oblastí v rovině $z = 0$ ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

Řešení:
Oblast integrace je $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le z \le x + 2y \ \&\ 0 \le y \le x^2 \ \&\ 0 \le x \le 1\}$. I zde platí **Fubiniho věta:** Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f : E \to \mathbb{R}$ integrabilní funkce (např. spojitá). Pak

$$\iiint_E f\ dV = \int_{\pi_1(E)} \Big(\int_{(\{x\}\times\mathbb{R})\cap\pi_{1,2}(E)} \Big(\int_{(\{x\}\times\{y\}\times\mathbb{R})\cap E} f(x,y,z)\ dz\Big)\ dy\Big)\ dx,$$

kde $\pi_{1,2}, \pi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jsou projekce, $\pi_{1,2}(x, y, z) = (x, y)$ a $\pi_1(x, y, z) = x$.

$$\iiint_E y\ dV = \int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{x+2y} y\ dz\ dy\ dx = \int_0^1\int_0^{x^2} y(x+2y)\ dy\ dx = \int_0^1 \Big[\frac{y^2}{2}x + \frac{2y^3}{3}\Big]_{y=0}^{y=x^2}\ dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3}\ dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{5}{28}.$$

8.4 Vypočtěte

$$\iiint_E xyz\ dV,$$

kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

Řešení:
Oblast integrace je $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le z \le xy \ \&\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \ \&\ 0 \le x \le 1\}$. Máme tedy

$$\iiint_E xyz\ dV = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\int_0^{xy} xyz\ dz\ dy\ dx = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2}\ dy\ dx = \frac{1}{8}\int_0^1 x^5 + x^{11}\ dx =$$

$$= \frac{1}{8}(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}) = \frac{1}{32}.$$