9. cvičení z Matematiky 2

13. dubna - 17. dubna 2015

9.1 Vypočítejte integrál

$$\iint\limits_E xe^{-y}\frac{\sin y}{y}\ dS$$

pro neomezenou množinu $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \frac{y}{2}\}$.

Řešení:
Pokud je v integrálu $\iint\limits_E f\ dS$ funkce f nebo oblast E integrace neomezená, pak je takový integrál určen (jako konečná) hodnota, pouze pokud je tzv. *absolutně konvergentní*, tj. pokud

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{E_n}|f|\ dS =: \iint\limits_E |f|\ dS < \infty$$

pro nějakou posloupnost omezených oblastí $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$ takovou, že f na E_n je omezená a $E = \cup_n E_n$.

Nejdříve tedy potřebujeme ověřit existenci zadaného integrálu, tj. absolutní konvergenci. Na E máme

$$\left|xe^{-y}\frac{\sin y}{y}\right| \le xe^{-y}.$$

Dále si pro $n \in \mathbb{N}$ zvolíme $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \frac{y}{2} \le n\}$. Takže

$$\iint\limits_{E_n} xe^{-y}\ dS = \int_0^{2n}\int_0^{\frac{y}{2}} xe^{-y}\ dx\ dy = \int_0^{2n}\frac{y^2}{8}e^{-y}\ dy \le \int_0^{\infty}\frac{y^2}{8}e^{-y}\ dy =: K < \infty$$

a proto $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{E_n} xe^{-y}\ dS \le K < \infty$ a integrál je absolutně konvergentní.

Teď tedy víme, že zadaný integrál existuje. V tom případě pro něj platí Fubiniho věta (v analogické podobě jako pro omezenou funkci na omezené množině). Můžeme proto psát:

$$\iint\limits_E xe^{-y}\frac{\sin y}{y}\ dS = \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{y}{2}} xe^{-y}\frac{\sin y}{y}\ dx\ dy = \frac{1}{8}\int_0^{\infty} y(e^{-y}\sin y)\ dy =$$

$$= \left[\begin{smallmatrix} g(y)=y, & g'(y)=1 \\ h'(y)=e^{-y}\sin y, & h(y)=-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y+\sin y)\end{smallmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\Big[y(-\frac{e^{-y}}{2})(\cos y+\sin y)\Big]_0^{\infty} - \frac{1}{8}\int_0^{\infty} -\frac{e^{-y}}{2}(\cos y+\sin y)\ dy =$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{\infty} e^{-y}(\cos y+\sin y)\ dy = \frac{1}{16}\Big[-e^{-y}\cos y\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{16}.$$

Poznámka: K odvození neučitých integrálu jsme použili následující postup (jednodušší než opakovaná metoda per partes) využívající funkce komplexní proměnné:

$$\int e^{-y}\cos y\ dy + \mathbf{i}\int e^{-y}\sin y\ dy = \int e^{-y}(\cos y + \mathbf{i}\sin y)\ dy = \int e^{-y}e^{\mathbf{i}y}\ dy =$$

$$= \int e^{(\mathbf{i}-1)y}\ dy = \frac{e^{(\mathbf{i}-1)y}}{\mathbf{i}-1} + C = -\frac{\mathbf{i}+1}{2}e^{-y}(\cos y + \mathbf{i}\sin y) + C =$$

$$= -\frac{e^{-y}}{2}(\cos y - \sin y) + \mathbf{i}(-\frac{e^{-y}}{2})(\cos y + \sin y) + C.$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí pak dostáváme:

$$\int e^{-y}\cos y\ dy = -\frac{e^{-y}}{2}(\cos y - \sin y) + C_1$$

a

$$\int e^{-y}\sin y\ dy = -\frac{e^{-y}}{2}(\cos y + \sin y) + C_2,$$

kde C_1, C_2 a C jsou konstanty.

9.2 Vypočtěte

$$\int\limits_{-2}^{2}\ \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\ \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\ dz\ dy\ dx.$$

Řešení:
Oblast integrace je

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2 \le x \le 2\ \&\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}\ \&\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \le 2\ \&\ x^2+y^2 \le 4\ \&\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\},$$

tedy kužel s výškou 2 a poloměrem podstavy také 2, který stojí na svém vrcholu v počátku. K výpočtu integrálu použijeme *cylindrické souřadnice*:

$$\Phi : \langle 0,+\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \text{kde}\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

tj.

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det\Phi' = r,$$

a vhodnější tvar **Věty o substituci:** Nechť $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ jsou oblasti integrace, $G \subseteq U$ otevřená množina a $\Phi : U \to V$ je zobrazení takové, že $U \setminus G$ je množina nulové míry (tj. $\int\int_{U\setminus G} 1\ dS = 0$) a Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na G. Pro integrabilní funkci $f : U \to \mathbb{R}$ pak platí

$$\int\int\limits_{\Phi(U)} f\ dS = \int\int\limits_{U} (f\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'|\ dS.$$

Jako parametrizaci E si teď vezmeme

$$U = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq z \leq 2 \ \& \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

a

$$G = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < r < z < 2 \ \& \ 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

Můžeme tedy psát

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2) \ dz \ dy \ dx = \int\int\int_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2) \ dV =$$

$$= \int\int\int_{U} r^2 \cdot r \ dV = \int_0^2 \int_0^z \int_0^{2\pi} r^3 \ d\varphi \ dr \ dz = 2\pi \int_0^2 \int_0^z r^3 \ \ dr \ dz =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^2 z^4 \ \ dz = \frac{\pi}{10} \cdot 2^5 = \frac{16}{5}\pi.$$

9.3 Vypočtěte

$$\int\int\int_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}} \ dV,$$

kde $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Řešení:
Použijeme *sférické souřadnice*:

$$\Psi : \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, \pi\rangle \to \mathbb{R}^3, \text{ kde } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Psi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r\sin\theta)\cos\varphi \\ (r\sin\theta)\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ty jsou složením dvou (upravených) cylindrických souřadnic a sice:

$$\Psi = \Phi_2 \circ \Phi_1$$

$$\Phi_1 \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta \\ \varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 \begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{\varphi} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{r}\cos\tilde{\varphi} \\ \tilde{r}\sin\tilde{\varphi} \\ u \end{pmatrix}$$

$$\Phi_1 : \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, \pi\rangle \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi_2 : \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

takže

$$\Psi'_{|(r,\varphi,\theta)} = (\Phi_2)'_{|\Phi_1(r,\varphi,\theta)} \circ (\Phi_1)'_{|(r,\varphi,\theta)}$$

a

$$\det \Psi' = \det(\Phi_2)'_{|\Phi_1} \cdot \det(\Phi_1)' = \tilde{r}_{|\Phi_1} \cdot r = (r\sin\theta) \cdot r = r^2 \sin\theta.$$

Pro větu o substituci si podobně jako v předchozím příkladu zvolíme parametrizaci koule $E = \Psi(U)$ jako

$$U = \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1 \ \&\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \ \&\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

a

$$G = \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < r < 1 \ \&\ 0 < \varphi < 2\pi \ \&\ 0 < \theta < \pi\}.$$

Takže můžeme psát

$$\iiint\limits_{E=\Psi(U)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-4z+4}}\, dV = \iiint\limits_{U} \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}\, dV =$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}\, d\varphi\, d\theta\, dr = 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}\, d\theta\, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[r\frac{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr = \pi \int_0^1 r\Big(\sqrt{r^2+4r+4} - \sqrt{r^2-4r+4}\Big)\, dr =$$

$$= \pi \int_0^1 r\Big(|r+2| - |r-2|\Big)\, dr = \pi \int_0^1 r\Big(r+2-(2-r)\Big)\, dr = 2\pi \int_0^1 r^2\, dr = \frac{2}{3}\pi.$$

9.4 Vypočtěte těžiště tělesa

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \ \&\ z \cdot \tan(\alpha) \geq \sqrt{x^2+y^2}\},$$

s hustotou $\rho = 1$, kde $R > 0$ a $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ jsou parametry.

Řešení:
Těleso E je průnikem koule o poloměru R a kužele s vrcholovým úhlem 2α, jehož špička je ve středu koule. Výhodné tedy bude použít opět sférické souřadnice

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x &=& r\sin\theta\cos\varphi \\ y &=& r\sin\theta\sin\varphi \\ z &=& r\cos\theta \end{array}$$

Parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U = \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq R \ \&\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \ \&\ 0 \leq \theta \leq \alpha\}$$

("ořezaná"verze pak $G = \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < r < R \ \&\ 0 < \varphi < 2\pi \ \&\ 0 < \theta < \alpha\}$.)

Pro těžiště musíme nejdříve spočítat hmotnost:

$$m = \iiint\limits_{E=\Psi(U)} 1\, dV = \iiint\limits_{U} r^2\sin\theta\, dV = \int_0^R \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R \int_0^\alpha r^2\sin\theta\, d\theta\, dr = 2\pi(1-\cos\alpha) \int_0^R r^2\, dr = \frac{2}{3}\pi R^3(1-\cos\alpha).$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m} \int\int\int_{E=\Psi(U)} z \; dV = \frac{1}{m} \int\int\int_U r^3 \cos\theta \sin\theta \; dV = \frac{1}{m} \int_0^R \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} r^3 \frac{\sin 2\theta}{2} \; d\varphi \; d\theta \; dr =$$

$$= \frac{\pi}{m} \Big(\int_0^R r^3 \; dr \Big) \cdot \Big(\int_0^\alpha \sin 2\theta \; d\theta \Big) = \frac{\pi R^4}{8m}(1 - \cos 2\alpha) = \frac{3R}{16} \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{3R}{8}(1 + \cos\alpha).$$

Použili jsme vztah

$$\int\int_{X \times Y} f(x) g(y) \; dV = \Big(\int_X f(x) \; dx \Big) \cdot \Big(\int_Y g(y) \; dy \Big)$$

pro integrabilní funkce $f : X \to \mathbb{R}$ a $g : Y \to \mathbb{R}$.