při stálé teplotě T_0 rozpínat z objemu V_1 na objem V_2 (isotermický děj).

Řešení. Na základě stavové rovnice

$$pV = RT$$

(R je plynová konstanta), je při isotermickém ději $p = \frac{RT_0}{V}$. Křivka C je pak částí hyperboly

$$C = \left\{ \left(V, \frac{RT_0}{V} \right) \mid V \in \langle V_1, V_2 \rangle \right\}.$$

Tomu odpovídá parametrizace

$$\varphi(V) = \left(V, \frac{RT_0}{V} \right), \quad V \in \langle V_1, V_2 \rangle.$$

Pak

$$\varphi'(V) = \left(1, -\frac{RT_0}{V^2} \right)$$

a dle výše uvedeného vztahu máme

$$\begin{aligned} Q &= \int_{(C)} \frac{c_V}{R} V \, \mathrm{d}p + \frac{c_p}{R} p \, \mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \left[\frac{c_V}{R} V \left(-\frac{RT_0}{V^2} \right) + \frac{c_p}{R} \frac{RT_0}{V} \right] \mathrm{d}V \\ &= \int_{V_1}^{V_2} \frac{(c_p - c_V) T_0}{V} \, \mathrm{d}V = (c_p - c_V) T_0 \left[\ln V \right]_{V_1}^{V_2} \\ &= (c_p - c_V) T_0 \ln \frac{V_2}{V_1}. \end{aligned}$$

Vypočítejte následující křivkové integrály:

1. $\int_{(C)} (x^2 - 2xy) \, \mathrm{d}x + (y^2 - 2xz) \, \mathrm{d}y$, kde (C) je orientovaný oblouk paraboly o rovnici $y = x^2$ s počátečním bodem $(-1, 1)$ a koncovým bodem $(1, 1)$.
2. $\int_{(C)} \frac{(x+y) \, \mathrm{d}x - (x-y) \, \mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$, kde (C) je kladně orientovaná kružnice se středem v počátku a poloměrem a.
3. $\int_{(C)} x \, \mathrm{d}y$, kde (C) je kladně orientovaný obvod trojúhelníku tvořený osami souřadnic a přímkou o rovnici $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.
4. $\int_{(C)} (2a - y, x) \, \mathrm{d}\vec{s}$, kde (C) je oblouk cykloidy s parametrizací $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Orientace je indukována uvedenou parametrizací.

5. $\int_{(C)} \frac{-y^2\,dx+x^2\,dy}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, kde (C) je kladně orientovaná asteroida o rovnici $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $a>0$.

6. $\int_{(C)} x\,dx+y\,dy+(x+y-1)\,dz$, kde (C) je orientovaná úsečka s počátečním bodem $(1,1,1)$ a koncovým bodem $(2,3,4)$.

7. $\int_{(C)} yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$, kde (C) je orientovaný oblouk šroubovice s parametrickým vyjádřením $\varphi(t)=(a\cos t, a\sin t, b\frac{t}{2\pi})$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$, jehož orientace je touto parametrizací určena.

8. $\int_{(C)} y\,dx+z\,dy+x\,dz$, kde (C) je průsečnice ploch o rovnicích $z=xy$, $x^2+y^2=1$, přičemž orientace je určena kladnou orientací průmětu do roviny xy.

9. $\int_{(C)} y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz$, kde (C) je část Vivianiho křivky dané rovnicemi $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$, $z\geq 0$, $a>0$. Počáteční bod je bod $(a/2,a/2,a/\sqrt{2})$, koncový bod je bod $(0,0,a)$.

10. Je dáno silové pole $\vec{F}(x,y)=(x+y,2x)$. Nalezněte práci, která se vykoná v tomto poli při pohybu po polokružnici $x^2+y^2=a^2$, $y\geq 0$. Orientaci přitom určuje následující pořadí bodů na křivce $(a,0)$, $(0,a)$, $(-a,0)$.

11. Nalezněte práci pružné síly, která směřuje k počátku souřadnicového systému a jejíž velikost je nepřímo úměrná vzdálenosti od počátku. Bod se pohybuje po elipse o rovnici $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ a to od bodu $(a,0)$ k bodu$(0,b)$.

12. Vypočtěte práci silového pole $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+(xz-y)\vec{k}$, po oblouku křivky $\{(t^2,2t,4t^3)\mid t\in\langle 0,1\rangle\}$ a to od bodu $(0,0,0)$ do bodu $(1,2,4)$.

13. Stanovte průtok kapaliny přes trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ za předpokladu, že rychlost proudění v bodě (x,y) je vektor $(x^2-y^2,-x^2-y^2)$.

14. Ukažte, že $\lim_{r\to\infty} P_r=0$, kde P_r je průtok kapaliny kružnicí o rovnici $x^2+y^2=r^2$, je-li rychlost proudění dána vektorovým polem $\vec{V}(x,y)=\left(\frac{y}{(x^2+y^2)^2},\frac{-x}{(x^2+y^2)^2}\right)$.

15. Magnetické pole je indukováno vodičem tvořeným n závity solenoidu o rovnici $x=a\cos t, y=a\sin t, z=\frac{d}{2\pi}t$, $t\in\langle 0,2\pi n\rangle$, kterým protéká proud o konstantní velikosti I. Vypočtěte složku B_3 vektoru magnetické indukce $\vec{B}$ ve všech bodech ležících v ose solenoidu.

16. Vypočtěte množství tepla, které pohltí grammolekula ideálního plynu, jehož teplota T je nepřímo úměrná objemu, $T=\frac{k}{V}$, kde $k\in\mathbb{R}$ je konstanta úměrnosti. Plyn se přitom rozpíná z objemu V_1 na objem V_2.

Konečně,

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R_2(R_1 - R_2\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\psi = 4\pi^2 R_1 R_2.$$

Stanovte obsah následujících ploch:

1. průniku roviny o rovnici $z = 2x+y$ s eliptickým válcem daným nerovnicí $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16} \le 1$;
2. grafu funkce $f(x,y) = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ definované na množině dané nerovností $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le c^2$ $a,b,c > 0$;
3. části kulové plochy o rovnici $x^2+y^2+z^2 = r^2$, kterou z ní vytíná válcová plocha určená podmínkami $x^2+y^2 = rx$, $z \ge 0$;
4. plochy dané parametrickým vyjádřením $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2$ $(u,v) \in \langle 0,4\rangle \times \langle 0,2\rangle$;
5. plochy dané parametrickým vyjádřením $x = u+v$, $y = u-v$, $z = v^2$, $(u,v) \in \langle 0,1\rangle^2$;
6. helikoidu daného parametrickým vyjádřením $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $(u,v) \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle$;
7. plochy dané parametrickým vyjádřením $x = \operatorname{tg} u\cos v$, $y = \operatorname{tg} u\sin v$, $z = \frac{\sin u}{2\cos^2 u} + \ln\sqrt{\frac{1+\sin u}{\cos u}} + v$, $(u,v) \in \langle 0,\pi/4\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle$;
8. plochy dané parametrizací $x = u\cos v$, $y = u\sin v, z = \frac{1}{2}u^2\sin 2v$, $(u,v) \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$
9. Předpokládejme, že f je nezáporná spojitá funkce definovaná na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pomocí Tvrzení 8.1 ukažte, že obsah plochy M, která vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x je dán vztahem
$$\mathrm{obsah}(M) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$
10. Určete obsah rotační plochy, která vznikne rotací grafu funkce $f(x) = \sin x$, $x \in \langle 0,\pi\rangle$ kolem osy x.
11. Stanovte obsah povrchu elipsoidu s poloosami a,b,b, kde $b < a$.
12. Nechť C je rovinná křivka a $f\colon C \to \mathbb{R}$ je nezáporná spojitá funkce. Ukažte, že je-li $M = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in C,\ 0 \le f(x,y)\}$, pak $\mathrm{obsah}(M) = \int_C f$.

K jeho výpočtu použijeme sférických souřadnic (φ, ϑ). Podle Tvrzení 9.1 dostaneme

$$\begin{aligned} V &= \iint_M \frac{\kappa\rho}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2zz_0+z_0^2}}\,\mathrm{d}S = \kappa\rho \iint_M \frac{1}{\sqrt{r^2+z_0^2-2zz_0}}\,\mathrm{d}S \\ &= \kappa\rho \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2\cos\vartheta}{\sqrt{r^2+z_0^2-2rz_0\sin\vartheta}}\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi r^2\kappa\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{r^2+z_0^2-2rz_0\sin\vartheta}}\,\mathrm{d}\vartheta. \end{aligned}$$

Substitucí $u = \sin\vartheta$ v daném integrálu pak dostaneme

$$\begin{aligned} V &= 2\pi r^2\kappa\rho \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{r^2+z_0^2-2rz_0u}} = 2\pi r^2\kappa\rho \left[\frac{\sqrt{r^2+z_0^2-2rz_0u}}{-rz_0}\right]_{u=-1}^{u=1} \\ &= 2\pi\frac{r\kappa\rho}{z_0}\left(\sqrt{r^2+z_0^2+2rz_0}-\sqrt{r^2+z_0^2-2rz_0}\right) \\ &= 2\pi\frac{r\kappa\rho}{z_0}(|r+z_0|-|r-z_0|). \end{aligned}$$

Závěrem tedy získáváme

$$V = \begin{cases} 4\pi\kappa r\rho, & z_0 \le r \\ 4\pi\dfrac{r^2\kappa\rho}{z_0} & z_0 \ge r \end{cases}.$$

Vypočtěte následující plošné integrály:

1. $\iint_M x^2+y^2\,\mathrm{d}S$, M je povrch kužele daného nerovností $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$.

2. $\iint_M \frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}S$, kde M je povrch čtyřstěnu daného nerovnostmi $x, y, z \ge 0$, $x+y+z \le 1$.

3. $\iint_M x^2y^2\,\mathrm{d}S$, kde M je část povrchu koule daná podmínkami $x^2+y^2+z^2 \le r^2$, $z \ge 0$.

4. $\iint_M \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}S$, kde M je válcová plocha o rovnici $x^2+y^2=r^2$ omezená rovinami s rovnicemi $z=0$ a $z=h>0$.

5. $\iint_M z\,\mathrm{d}S$, kde M je část plochy o rovnici $x^2+z^2=2az$ $(a>0)$, vyříznutá kuželovou plochou o rovnici $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

6. $\displaystyle\iint_M xy + yz + zx \,\mathrm{d}S$, kde M je část povrchu kužele $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ vyříznutá válcem o rovnici $x^2 + y^2 = 2ax$.

7. Nechť M je plocha daná vztahem $M = C \times \langle 0, 1\rangle$, kde $C \subset \mathbb{R}^2$ je rovinná křivka. Dokažte, že je-li $f(x, y, z) = g(x, y)$, kde g je spojitá funkce na křivce C, pak

$$\iint_M f = \int_C g.$$

8. Vypočtěte hmotnost kulové skořepiny, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$, je-li plošná hustota rovna a) vzdálenosti od osy z; b) druhé mocnině vzdálenosti od osy z.

9. Nalezněte množství náboje rozloženého na ploše dané podmínkami $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ $0 \leq z \leq 1$, je-li plošná hustota $f(x, y, z) = z$.

Nalezněte těžiště následujících homogenních ploch:

10. části kuželové plochy o rovnici $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, jež se nachází ve válci o rovnici $x^2 + y^2 = ax$;

11. plochy dané podmínkami $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $x, y \geq 0$, $x + y \leq a$.

12. Najděte těžiště kuželové plochy $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, je-li hustota v každém bodě úměrná vzdálenosti od osy z.

13. Nechť M je plocha s hustotou $\rho(x, y, z)$. Na základě axiomatického přístupu odvoďte, že pro moment setrvačnosti I_p plochy M vzhledem k ose p platí

$$I_p = \iint_M f^2 \rho,$$

kde hodnota funkce f v bodě (x, y, z) je vzdálenost bodu (x, y, x) od přímky p.

V následujících příkladech vypočtěte momenty setrvačnosti uvedených ploch vzhledem k ose z. Předpokládáme, že hustota je konstantní funkce ρ.

14. koule o poloměru a se středem v počátku;

15. kulového vrchlíku zadaného podmínkami $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $0 < h \leq z \leq r$;

16. plochy určené vztahy $h^2(x^2 + y^2) = a^2 z^2$, $0 < z < h$;

17. plochy určené podmínkami $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$.

18. Ukažte, že pro moment setrvačnosti I_z vůči ose z homogenní rotační plochy s hustotou ρ, která vznikne rotací grafu funkce $z = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, kolem osy z, platí $I_z = 2\pi \int_a^b x^2 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x$.

19. Na základě axiomatických požadavků odvoďte integrální vyjádření hydrostatické síly působící na danou plochou (viz úloha výše).

20. Najděte sílu, kterou působí kapalina s hustotou ρ na dno nádoby ve tvaru eliptického paraboloidu o rovnici $z = h\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$, $-h \le z \le 0$.

21. Určete jakou silou přitahuje useknutá kuželová plocha daná parametrizací $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$, $z = \varrho$; $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 < b \le \varrho \le a$ o konstantní hustotě ρ hmotný bod o hmotnosti m umístěný v bodě $(0, 0, 0)$.

22. Najděte gravitační potenciál části válce o rovnici $x^2 + y^2 = r^2$, $0 \le z \le h$ v bodech na ose z.

Výsledky.

1. $\frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2})$; 2. $\frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3} - 1)\ln 2$; 3. $\frac{2\pi r^6}{15}$; 4. $2\pi \operatorname{arctg} \frac{h}{r}$; 5. $\frac{7}{2}\pi\sqrt{2}a^3$; 6. $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$; 8. a) $\frac{\pi r^3}{2}$, b) $\frac{4\pi r^3}{3}$; 9. $\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$; 10. $(\frac{a}{2}, 0, \frac{16}{9}a)$; 11. $\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{\pi}(\sqrt{2} + 1)\right)$; 12. $2\sqrt{2}k\pi(0, 0, 3/9)$; 14. $\frac{8\pi a^4 \rho}{3}$; 15. $\frac{2}{3}\pi r\rho(2r^3 - 3r^2 h + h^3)$; 16. $\pi a^3 \rho\sqrt{a^2 + \frac{h^2}{2}}$; 17. $\frac{\sqrt{3}}{12}$; 20. $\vec{F} = -\frac{1}{2}\pi\rho abh\vec{k}$; 21. $\vec{F} = \pi\kappa m\rho \ln\frac{a}{b}\vec{k}$; 22. $V(0, 0, z_0) = 2\kappa\rho\pi \ln \frac{|h-z_0+\sqrt{(h-z_0)^2+r^2}|}{|-z_0+\sqrt{z_0^2+r^2}|}$.

1. $\displaystyle\iint\limits_{(M)} x^2y^2z \; dx\,dy$, kde (M) je polovina kulové plochy $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\le 0$, orientována normálovým polem se zápornou složkou z;

2. $\displaystyle\iint\limits_{(M)} xz\,dy\,dz + xy\,dz\,dx + yz\,dx\,dy$, kde M je povrch jehlanu ohraničeného rovinami o rovnicích $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. Orientace je dána vnitřním normálovým polem.

3. $\displaystyle\iint\limits_{(M)} (z-r)^2 \; dx\,dy$, kde M je část kulové plochy $x^2+y^2+z^2=2rz$, $r\le z\le 2r$. Orientace je indukována vnějším normálovým polem.

4. $\displaystyle\iint\limits_{(M)} (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy$, kde M je část kuželové plochy $x^2+y^2=z^2$, $0\le z\le h$. Orientace je indukována vnějším normálovým polem.

5. $\displaystyle\iint\limits_{(M)} z^2 \; dx\,dy$, kde (M) je povrch elipsoidu s poloosami a,b,c a středem v počátku, který je orientován vnějším normálovým polem.

6. $\displaystyle\iint\limits_{(M)} \frac{1}{x}\,dy\,dz + \frac{1}{y}\,dz\,dx + \frac{1}{z}\,dx\,dy$, kde (M) je povrch elipsoidu s poloosami a,b,c a středem v počátku, který je orientován vnějším normálovým polem.

7. $\displaystyle\iint\limits_{(M)} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, kde M je kulová plocha daná rovnicí $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$. Orientace je dána vnějším normálovým polem.

8. Určete průtok plochou o rovnici $x^2+y^2+2az=a^2$, $x,y,z\ge 0$, je-li rychlost proudění $\vec V(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$.

9. Vypočtěte množství kapaliny, které proteče oblastí $x^2+y^2\le r^2, 0\le z\le a$, $a>0$, je-li rychlost proudění $\vec V(x,y,z)=(xz,yz,xy)$.

10. Určete průtok helikoidem $M=\{(u\cos v, u\sin v, cv) \mid (u,v)\in\langle a,b\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\}$, $0<a<b$, $c>0$, jeli rychlostní pole $\vec V(x,y,z)=(x,y,z)$.

11. Nechť C je uzavřená jednoduchá křivka v rovině xy. Položme $M=C\times\langle 0,1\rangle$. Orientace této plochy je dána vnějším normálovým polem. Ukažte, že

$$\iint\limits_{(M)} F_1(x,y)\;dy\,dz + F_2(x,y)\;dz\,dx = \int\limits_{(C)} (F_1,F_2).$$

4. $\displaystyle\iint_{(M)} x\vec{\imath} + 2y\vec{\jmath} + (3z - x^2)\vec{k}\,\mathrm{d}\vec{S}$, kde M je povrch elipsoidu se středem v počátku a poloosami a, b, c. Orientace je dána vnějším normálovým polem;

5. $\displaystyle\iint_{(M)} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je povrch jehlanu omezeného rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$. Orientace je dána vnějším normálovým polem;

6. $\displaystyle\iint_{(M)} x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je povrch koule o poloměru a a středem v počátku orientovaná vnějším normálovým polem;

7. $\displaystyle\iint_{(M)} (x - y + z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y - z + x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z - x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x, y, z) \mid |x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1\}$. Orientace je dána vnějším normálovým polem.

8. Nechť plocha omezující těleso A má ve sférických souřadnicích rovnici $\varrho = f(\varphi, \vartheta)$ $(\varphi, \vartheta) \in B$. Ukažte, že objem$(A) = \frac{1}{3}\iint_B \varrho^3 \cos\vartheta$.

9. Na základě předchozí úlohy stanovte objem tělesa, jehož hranice má ve sférických souřadnicích vyjádření $\varrho = a\cos\vartheta$.

10. Ukažte, že pro funkce f a g se spojitými derivacemi druhého řádu na oblasti $G \subset \mathbb{R}^3$ jejíž hranicí je plocha orientovaná vnějším normálovým polem platí
a) $\iint_{(\partial G)} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{u}} = \iiint_G \Delta f$.
b) $\iint_{(\partial G)} f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\vec{u}} = \iiint_G f\Delta g + \iiint_G \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g$.
(Uvedené vztahy se nazývají Greenovy formule.)

11 Nechť u je funkce se spojitými parciálními derivacemi v $\mathbb{R}^3$, pro kterou platí $\Delta u = 0$. Ukažte, že $\iint_{(S)} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\vec{n}} = 0$ pro každou uzavřenou plochu S s jednotkovým normálovým polem $\vec{n}$, která splňuje předpoklady Gaussovy věty. Jaký je fyzikální význam tohoto faktu?

12 Kapalina proudí v omezené oblasti $G \subset \mathbb{R}^3$. Její rychlostní vektorové pole $\vec{V}$ nemá zřídla ani nory. Nechť $\rho(x, y, z, t)$ je hustota kapaliny v bodě (x, y, z) a čase t. Odvoďte rovnici proudění $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$.

13 Nalezněte tok vektorového pole $\vec{F} = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{grad}\left(\frac{-q_i}{4\pi r_i}\right)$, kde r_i je funkce udávající vzdálenost bodu od zřídla (x_i, y_i, z_i), přes uzavřenou plochu orientovanou vnějším normálovým polem, která obsahuje všechny body (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots n$, ve své vnitřní oblasti.

14 Ukažte, že $\int_{(C)} (yx^3 + e^y)\,\mathrm{d}x + (xy^3 + xe^y - 2y)\,\mathrm{d}y = 0$, jeli $C \subset \mathbb{R}^2$ libovolná jednoduchá uzavřená křivka středově souměrná podle počátku.

15 Dokažte, že $\int_{(\partial D)}(2xy - y)\,dx + x^2\,dy = \text{obsah}(D)$, kde D je omezená oblast v $\mathbb{R}^2$, jejíž hranice je orientovaná uzavřená jednoduchá křivka.

Pomocí Greenovy věty vypočtěte následující křivkové integrály

16. $\int_{(C)} y^2\,dx + x\,dy$, kde (C) je kladně orientovaná hranice čtverce $\langle -1, 1\rangle^2$;

17. $\int_{(C)}(3x^2\cos y - y^3)\,dx + (x^3 - 3x^2\sin y)\,dy$, kde (C) je jednotková kružnice se středem v počátku a kladnou orientací;

18 $\int_{(C)} xe^{-y^2}\,dx + \left(-x^2ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2}\right)\,dy$, kde (C) je kladně orientovaný obvod čtverce $\langle -a, a\rangle^2$;

19 $\int_{(C)}(x + y)\ dx - (x - y)\ dy$, kde (C) je kladně orientovaná elipsa s poloosami a, b a středem v počátku;

20 $\int_{(C)}(e^x\sin y - 16y)\ dx + (e^x\cos y - 16)\ dy$, kde C je polokružnice daná podmínkami $x^2 + y^2 = ax$, $y \geq 0$, s počátečním bodem $(a, 0)$ a koncovým bodem $(0, 0)$. Návod: Doplňte polokružnici úsečkou na uzavřenou křivku.

V následujících úlohách nalezněte obsah oblasti omezené zadanou křivkou

21. elipsou s poloosami a, b;

22. smyčkou Descarteova listu o rovnici $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$;

23. křivkou o rovnici $y^2 = x^2 - x^4$.

24. Pomocí Stokesovy věty odvoďte, že $\int_{(C)} yz\ dx + xz\ dy + xy\ dz = 0$ pro každou uzavřenou křivku C, která je krajem orientované plochy v $\mathbb{R}^3$.

V následujících úlohách spočtěte uvedené integrály s použitím Stokesovy věty.

25. $\int_{(C)}(y^2 - z^2)\ dx + (z^2 - x^2)\ dy + (x^2 - y^2)\ dz$, kde C je řez povrchu kostky $J = \langle 0, a\rangle^3$ rovinou $x + y + z = 3\frac{a}{2}$. Orientace je určena pořadím bodů $(\frac{a}{2}, 0, 0)$, $(a, 0, \frac{a}{2})$, $(a, \frac{a}{2}, 0)$;

26. $\int_{(C)}(y + z)\ dx + (z + x)\ dy + (x + y)\ dz$, kde C je elipsa s parametrickým vyjádřením $\varphi(t) = a(\sin^2 t, 2\sin t\cos t, \cos^2 t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Orientace je indukována uvedenou parametrizací;

27 $\int_{(C)} y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}\ \ d\vec{s}$, kde (C) je obvod trojúhelníka s vrcholy $(a, 0, 0)$ $(0, a, 0)$ $(0, 0, a)$. Orientace je určena uvedeným pořadím vrcholů;.

28. $\int_{(C)} y^2z^2\ dx + x^2z^2\ dy + x^2y^2\ dz$, kde C je uzavřená křivka s parametrizací $\varphi(t) = (a\cos t, a\cos 2t, a\cos 3t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Orientace je dána zadanou parametrizací.

Nalezený potenciál vyhovuje podmínce $f(0,0,0)=0$ a ostatní potenciály pole $\vec{F}$ v $\mathbb{R}^3$ se od něho liší o konstantní funkci.

Úloha. Nalezněte potenciál (existuje-li) vektorového pole

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{yz}{1+x^2y^2z^2},\frac{xz}{1+x^2y^2z^2},\frac{xy}{1+x^2y^2z^2}\right)$$

v oblasti $\mathbb{R}^3$, pro který platí, že $f(0,0,0)=0$.

Řešení: Postup výpočtu bude stejný jako v předchozím příkladu. Rovnost $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$ nám opět říká, potenciál existuje. K jeho výpočtu zvolíme křivku $L_{(x,y,z)}$, jejíž počáteční bod je počátek, koncový bod (x,y,z), a která se skládá ze tří úseček rovnoběžných se souřadnicovými osami. Nechť L_1 je první úsečka daná parametrizací $\varphi_1(t)=(t,0,0)$ $t\in\langle 0,x\rangle$, druhá, L_2, má parametrizaci $\varphi_2(t)=(x,t,0)$, $t\in\langle 0,y\rangle$ a třetí L_3 je dána parametrizací $\varphi_3(t)=(x,y,t)$, $t\in\langle 0,z\rangle$. Snadným výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned}\int\limits_{(L_{(x,y,z)})}\vec{F} &= \int\limits_{(L_1)}\vec{F}+\int\limits_{(L_2)}\vec{F}+\int\limits_{(L_3)}\vec{F}\\ &= \int\limits_{(L_3)}\vec{F}=\int\limits_0^z\frac{xy}{1+t^2x^2y^2}\,dt=[\operatorname{arctg}(txy)]_0^z=\operatorname{arctg}xyz.\end{aligned}$$

Hledaným potenciálem je tedy funkce

$$f(x,y,z)=\operatorname{arctg}(xyz).$$

1. Nechť $\vec{F}=-k^2(x,y,z)$, $k>0$. ($\vec{F}$ je silové pole síly pružnosti.) Ukažte, že $\vec{F}$ je potenciální v $\mathbb{R}^3$ a nalezněte jeho potenciál. Vypočtěte pak práci při pohybu s počátečním bodem $(0,0,0)$ a koncovým bodem $(1,1,1)$.

2. Stanovte potenciál vektorového pole

$$\vec{F}=\frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$$

pro $(x,y,z)\neq(0,0,0)$.

Určete potenciály následujících vektorových polí v uvedených oblastech (existují-li).

3. $\vec{F}=(-y^2-2xz,2yz-2xy,y^2-x^2)$ v $\mathbb{R}^3$;

4. $\vec{F}=yz(2x+y+z)\vec{i}+xz(x+2y+z)\vec{j}+xy(x+y+2z)\vec{k}$ v $\mathbb{R}^3$;

5. $\vec{F} = (25x^4y - 3y^2)\vec{i} + (5x^5 - 6xy - 5)\vec{j}$ v $\mathbb{R}^2$;

6. $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ v $G = \{(x,y) \mid y > 0\}$;

7. $\vec{F} = (3x^2y^2z^3 + z + 1, 2x^3yz^3 + 6yz + 2, 3x^3y^2z^2 + x + 3y^2 - 1)$ v $\mathbb{R}^3$;

8. $\vec{F} = (y^2 \cos x + z^3, -4 + 2y \sin x, 3x^2 + 2)$ v $\mathbb{R}^3$;

9. Stanovte parametr c tak, aby vektorové pole $\vec{F} = (z, y^2 + cz, cx + y)$ bylo potenciální v $\mathbb{R}^3$.

10. Nechť f je spojitě diferencovatelná funkce na $\mathbb{R}$. Nalezněte potenciál vektorového pole $\vec{F} = f(xyz)(yz, xz, xy)$ v $\mathbb{R}^3$.

11. Ukažte, že lineární kombinace potenciálních polí je opět potenciální pole. Určete potenciál gravitačního pole tvořeného n hmotnými body jednotkové hmotnosti umístěnými v bodech (i,i,i), $i = 1, 2, \ldots n$.

12. Zjistěte zda je integrál $\int_{(C)} \left(3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2}\right)\, dx + \frac{1}{x+z}\, dy + \frac{y}{(x+z)^2}\, dz$ nezávislý na cestě v oblasti $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid x + z \neq 0\}$. Stanovte pak tento integrál pro křivku $C \subset G$ s počátečním bodem $(1,1,0)$ a koncovým bodem (x,y,z).

13. Nechť $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ je pevně zvolený bod. Ukažte, že integrál $\int_{(C)} (\vec{r} - (x_0, y_0, z_0))\, d\vec{s}$, kde $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$ nezávisí na cestě.

14. Dokažte, že množství tepla, které pohltí grammolekula ideálního plynu při přechodu od stavu s objemem V_1 a tlakem p_1 do stavu s objemem V_2 a tlakem p_2 nezávisí pouze na těchto parametrech. (Návod: Použijte Mayerův vztah).

15. Určete práci, která se vykoná v poli $\vec{F} = \frac{2}{\sqrt{y+z}}\vec{i} - \frac{x}{\sqrt{(y+z)^3}}\vec{j} - \frac{x}{\sqrt{(y+z)^3}}\vec{k}$ při pohybu po křivce ležící v ležící v definičním oboru pole $\vec{F}$ s počátečním bodem $(1,1,3)$ a koncovým bodem $(2,4,5)$.

16. Kulová plocha o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ je nabita nábojem o konstantní plošné hustotě ρ. Stanovte práci, která bude vykonána v příslušném elektrostatickém poli při pohybu od bodu (x_1, y_1, z_1) do bodu (x_2, y_2, z_2) uvnitř dané koule. (Návod: Využijte potenciálu jednoduché vrstvy odvozeném v Kapitole 9.)

17. Nalezněte funkci $f(x,y,z)$, jejíž diferenciál je zobrazení $df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3) = (3x^2y^2 - 2x^4)h_1 + 2x^3y^2h_2 - 8xz^3h_3$.

18. Je dána diferenciální rovnice $p(x,y) + q(x,y)y' = 0$, kde p a q jsou spojitě diferencovatelné funkce v jednoduše souvislé oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$. Ukažte, že vektorové pole $\vec{F} = (p(x,y), q(x,y))$ je potenciální právě tehdy když $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ v G. Ukažte dále, že je-li f potenciál pole $\vec{F}$, pak každá diferencovatelná funkce $y(x)$, pro kterou je $f(x, y(x))$ konstantní funkce, je řešení výše uvedené diferenciální rovnice.