1. cvičení z Matematiky 2

22.-26. února 2016

1.1 Ukažte, že pro vektory $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ platí:

(1) Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory u, v, w je $|u \cdot (v \times w)|$.

(2) $u \cdot (v \times w) = \det(u, v, w) = \det(v, w, u) = v \cdot (u \times w)$.

Řešení:
(1)

$$\textit{objem rovnoběžnostěnu} = \textit{obsah podstavy} \times \textit{výška}$$

Jako podstavu si vezmeme rovnoběžnostěn určený vektory v, w (pokud by náhodou byly lineárně závislé, je $v \times w = 0$ a vzorec evidentně platí).

- *obsah podstavy* $= \|v \times w\|$
- *výška* $= |u \cdot n|$, kde n je jednotkový vektor kolmý k podstavě (např. $n = \frac{v \times w}{\|v \times w\|}$).

Takze

$$\textit{objem rovnoběžnostěnu} = \|v \times w\| \cdot |u \cdot n| = \|v \times w\| \cdot \left| u \cdot \frac{v \times w}{\|v \times w\|} \right| = u \cdot (v \times w)\ .$$

(2) Pro $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ a $w = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ máme

$$u \cdot (v \times w) = (a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \det(u, v, w)$$

protože je to rozvoj podle prvního řádku uvedené matice. Další rovnosti už plynou z toho, že při permutaci řádků se vytýká před determinant znaménko dané permutace (a podobně pro sloupce).

1.2 V plochém světě A, který je dvoudimenzionálnim afinním prostorem s přidruženým vektorovým prostorem $V \cong \mathbb{R}^2$, místní bytosti zjistili, že jisté dva vektory $u, v \in V$ tvoří ortonormální bázi (tj. jsou na sebe kolmé a mají délku 1). Tyto bytosti mají tedy ve svém světě zadán skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : V \times V \to \mathbb{R}$ a tím i způsob, jak měřit úhly a vzdálenosti.

Na svět A se teď MY budeme dívat "z vnějšku"a v bázi $\mathcal{E}$, kterou zase MY považujeme za ortonormální (tj. používáme skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : V \times V \to \mathbb{R}$), mají tyto dva vektory souřadnice $(u)_{\mathcal{E}} = \binom{1}{2}$ a $(v)_{\mathcal{E}} = \binom{2}{1}$.

Ploché bytosti nyní kolem určitého bodů o (který si stanovíme jako počátek souřadné soustavy) namalují kružnici M o poloměru 1 (vzhledem k normě $\|w\|_1 := \sqrt{\langle w, w \rangle_1}$).

(1) Jak bude tato množina M vypadat z hlediska souřadnic NAŠÍ báze $\mathcal{E}$? Tj. najdete rovnici množiny M v těchto souřadnicích.

(2) Jestliže rovnice popisující množinu M v bázi $\mathcal{E}$ nemá "jednoduchý"tvar (tj. v rovnici se vyskytují smíšené, případně lineární členy), najděte jinou bázi $\mathcal{Y}$, která bude opět z NAŠEHO pohledu ortonormální (tedy vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$), ale ve které už bude tento "nedostatek"odstraněn (tj. rovnice v této bázi už bude mít "jednoduchý"tvar).

(3) Jak je možné, že tytéž vektory u a v se mohou jednou jevit jako kolmé (z hlediska plochých bytosti) a podruhé ne (při pohledu z vnějšku)? Rovinu A můžeme např. vidět pod nějakým úhlem a vektory (a tím i jejich úhly) tak mohou být "zkreslené". Situaci si konkrétně namodelujeme v prostoru $\mathbb{R}^3$, kde budeme vždy předpokládat, že pracujeme se STANDARDNÍM skalárním součinem:

Plochý svět ztotožníme s rovinou $V \subseteq \mathbb{R}^3$ procházející počátkem, na kterou se budeme dívat "ze shora", tj. budeme ji projektovat do základy $W = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ pomocí kolmé projekce $\pi : \mathbb{R}^3 \to W$.

Úkol nyní je: Najděte rovinu $V \subseteq \mathbb{R}^3$ a v ní příslušné vektory $u, v \in V$ tak, aby byly k sobě kolmé a měly stejnou délku (způsob jakým je přirozeně vnímají ploché bytosti), ale přitom aby jejich kolmé projekce $\pi(u), \pi(v) \in W$ do základny (způsob jak zase MY dané vektory vidíme) měly souřadnice $\big(\pi(u)\big)_{\mathcal{E}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ a $\big(\pi(v)\big)_{\mathcal{E}} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, kde $\mathcal{E} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right)$ je báze základny W.

Poznámka: Délku rovnou 1 u vektorů u, v bohužel požadovat nemůžeme, protože kolmá projekce obecně délku zkracuje (tj. $\|\pi(w)\| \leq \|w\|$) a délka projekcí vektorů je $\|\pi(u)\| = \|\pi(v)\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} > 1$.

Řešení:
(1) Kružnice je tedy definována jako

$$M = \{a \in A \mid \|w\|_1 = 1,\ \text{kde } w = a - o \in V\} \ .$$

Označme si $\mathcal{X} = (u, v)$ bázi vektorového prostoru V (kterou preferují ploché bytosti) a nechť

$$(w)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

jsou souřadnice bodu $a \in A$ v této souřadné soustavě (kde $w = a - o$). Rovnice množiny M v této soustavě pak má očekávaný tvar

$$(x')^2 + (y')^2 = 1 \ .$$

Je to proto, že $\mathcal{X}$ je ortonormální báze vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. Tedy pro $w = x' \cdot u + y' \cdot v$ díky rovnostem $\langle u, u \rangle\, e_1 = 1 = \langle v, v \rangle_1$ a $\langle u, v \rangle_1 = 0$ máme

$$1 = \langle w, w \rangle_1 = \langle x'u + y'v, x'u + y'v \rangle_1 =$$
$$= (x')^2 \langle u, u \rangle_1 + x'y' \langle u, v \rangle_1 + y'x' \langle v, u \rangle_1 + (y')^2 \langle v, v \rangle_1 = (x')^2 + (y')^2 \ .$$

Pro vyjádření v "naší"bázi $\mathcal{E}$ pomocí souřadnic $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) := (w)_{\mathcal{E}}$ pak máme vztah

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (w)_{\mathcal{X}} = \mathbb{A}(w)_{\mathcal{E}} = \mathbb{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

kde $\mathbb{A}$ je příslušná matice přechodu od jedné báze k druhé, konkrétně

$$\mathbb{A} = {}_{\mathcal{X}}(\mathrm{Id})_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id})_{\mathcal{X}}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \ .$$

Abychom dostali vyjádření rovnice množiny M v nove bázi, stačí jen do rovnice $(x')^2 + (y')^2 = 1$ dosadit $x' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y$ a $y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y$ nebo použít přehlednější tvar:

$$1 = (x')^2 + (y')^2 = (x', y') \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (w)_{\mathcal{X}}^T \cdot (w)_{\mathcal{X}} = \Big(\mathbb{A}(w)_{\mathcal{E}}\Big)^T \cdot \mathbb{A}(w)_{\mathcal{E}} =$$
$$= (w)_{\mathcal{E}}^T \cdot \mathbb{A}^T\mathbb{A} \cdot (w)_{\mathcal{E}} = (w)_{\mathcal{E}}^T \cdot \mathbb{B} \cdot (w)_{\mathcal{E}} = (x, y) \cdot \frac{1}{9} \left(\begin{smallmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{smallmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\big(5x^2 - 8xy + 5y^2\big)$$

kde

$$\mathbb{B} = \mathbb{A}^T\mathbb{A} = \frac{1}{9}\cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{smallmatrix}\right) \ .$$

Množina M tedy v "našich"souřadnicích má tvar

$$5x^2 - 8xy + 5y^2 = 9 \ .$$

(2) Rovnice v bázi $\mathcal{X}$ bohužel obsahuje smíšené členy, takže nejde příliš poznat, o jaký útvar se jedná. I když intuitivně tušíme, že lineární deformací kružnice (jak to vidí bytosti) vznikne elipsa (jak to zase vidíme my), tak minimálně není jasné, kde bude mít své poloosy a jaká bude jejich délka.

Hledáme proto bázi $\mathcal{Y}$ takovou, že bude ortonormální z NAŠEHO hlediska

- tedy matice přechodu $\mathbb{G} = {}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id})_{\mathcal{Y}}$ je ortogonální, tj. platí $\mathbb{G}^T\mathbb{G} = \mathbb{E}$

a přitom chceme, aby rovnice v této bázi (kde $(w)_{\mathcal{E}} = \mathbb{G}(w)_{\mathcal{Y}}$):

- $1 = (w)_{\mathcal{E}}^T \cdot \mathbb{B} \cdot (w)_{\mathcal{E}} = \Big(\mathbb{G}(w)_{\mathcal{Y}}\Big)^T \cdot \mathbb{B} \cdot \Big(\mathbb{G}(w)_{\mathcal{Y}}\Big) = (w)_{\mathcal{Y}}^T \cdot \mathbb{G}^T\mathbb{B}\mathbb{G} \cdot (w)_{\mathcal{Y}}$

měla "jednoduchý"tvar, tedy aby matice $\mathbb{G}^T\mathbb{B}\mathbb{G}$ byla diagonální. Vektory báze $\mathcal{Y} = (\overline{u}, \overline{v})$ (přesněji: jejich vyjádření $(\overline{u})_{\mathcal{E}}$ a $(\overline{v})_{\mathcal{E}}$ v bazi $\mathcal{E}$) tedy musí být vlastní vektory matice $\mathbb{B}$. Hledáme tudíž kořeny polynomu

$$\det(\mathbb{B} - \lambda\mathbb{E}) = \det\left(\begin{smallmatrix} \frac{5}{9}-\lambda & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{5}{9}-\lambda \end{smallmatrix}\right) = \left(\frac{5}{9} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

které jsou $\lambda_1 = \frac{1}{9}$ a $\lambda_2 = 1$. Pro $\lambda_1 = \frac{1}{9}$ hledáme řešení $(\overline{u})_{\mathcal{E}}$ soustavy

$$\left(\begin{smallmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$$

pro které je $\|\overline{u}\|_2 = 1$, tedy např. $(\overline{u})_{\mathcal{E}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Pro $\lambda_2 = 1$ hledáme řešení $(\overline{v})_{\mathcal{E}}$ soustavy

$$\left(\begin{smallmatrix} -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

pro které je $\|\overline{v}\|_2 = 1$, tedy napr. $(\overline{v})_{\mathcal{E}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Tedy

$$\mathbb{G} = {}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id})_{\mathcal{Y}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$$

a

$$\mathbb{G}^T\mathbb{B}\mathbb{G} = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

takže množina M má v $\mathcal{Y}$ rovnici (označíme-li $\left(\begin{smallmatrix} x'' \\ y'' \end{smallmatrix}\right) := (w)_{\mathcal{Y}}$):

$$1 = (w)_{\mathcal{Y}}^T \cdot \mathbb{G}^T\mathbb{B}\mathbb{G} \cdot (w)_{\mathcal{Y}} = (x'', y'')\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x'' \\ y'' \end{smallmatrix}\right) = \frac{(x'')^2}{9} + (y'')^2$$

tedy je to skutečně elipsa, která má delší poloosu s délkou 3 ve směru vektoru $\overline{u}$ a kratší poloosu délky 1 ve směru vektoru $\overline{v}$ (elipsa je tedy svým protáhlejším koncem v bázi $\mathcal{E}$ pootočena o 45° v kladném směru vzhledem k vodorovné ose).

Poznámka: Definujeme-li si zobrazení $f : V \times V \to \mathbb{R}$ jako $f(w, z) := \langle w, z\rangle_1$, pak f je *bilineární* forma, které můžeme přiřadit matici ve zvolené bázi: pro bázi $\mathcal{W} = (w_1, w_2)$ je matice v této bázi definovaná jako $(f)_{\mathcal{W}} := (f(w_i, w_j))_{i,j\in\{1,2\}}$. Speciálně tedy máme

$$(f)_{\mathcal{X}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \mathbb{E}$$

$$(f)_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{X}}(\mathrm{Id})_{\mathcal{E}}^T \cdot (f)_{\mathcal{X}} \cdot {}_{\mathcal{X}}(\mathrm{Id})_{\mathcal{E}} = \mathbb{A}^T \mathbb{E} \mathbb{A} = \mathbb{B} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(f)_{\mathcal{Y}} = {}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id})_{\mathcal{Y}}^T \cdot (f)_{\mathcal{E}} \cdot {}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id})_{\mathcal{Y}} = \mathbb{G}^T \mathbb{B} \mathbb{G} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a báze $\mathcal{Y} = (\overline{u}, \overline{v})$ je tak *ortogonální* (tj. vektory jsou kolmé) v obou skalárních součinech, ale v každém mají tyto vektory různé délky ($\|\overline{u}\|_2 = 1 = \|\overline{v}\|_2$ a $\|\overline{u}\|_1 = \frac{1}{9}$, $\|\overline{v}\|_1 = 1$).

(3) Rovina V bude jednoznačně určena tím, když najdeme vektory u, v, které ji vytvářejí. Máme tedy

$$\pi(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \pi(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \mu \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ a chceme, aby

$$u \cdot v = 0 \quad \text{a} \quad u \cdot u = v \cdot v$$

tedy

$$\lambda \cdot \mu + 2 + 2 = 0 \quad \text{a} \quad \lambda^2 + 2^2 + 1^2 = \mu^2 + 1^2 + 2^2 \ .$$

Řešení tedy je $\lambda = 2$ a $\mu = -2$ nebo $\lambda = -2$ a $\mu = 2$.

Jak se dalo (i intuitivně) očekávat, roviny budou dvě (navzájem zrcadlové obrazy podle základny W) a to sice

$$V_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$$

a

$$V_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \ .$$

Příslušné vektory pak mají vždy délku 3.

Můžeme ještě zjistit, jaký úhel svírají roviny V_i se základnou W: Úhel rovin $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je dán jako

$$\cos\alpha = \frac{\left| n_i \cdot e_3 \right|}{||n_i|| \cdot ||e_3||}$$

kde n_i je normálový vektor roviny V_i a $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ je normálový vektor zaklady W. Normálový vektor můžeme získat např. vektorovým součinem:

$$n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Takže $||n_1|| = ||n_2|| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} = 9$ a $\cos\alpha = \frac{3}{9 \cdot 1} = \frac{1}{3}$, což odpovídá úhlu $\alpha = \arccos\frac{1}{3} \doteq 70.52°$.