10. cvičení z Matematiky 2

25. - 29. dubna 2015

10.1 Vypočítejte integrál

$$\iint\limits_E xe^{-y}\frac{\sin y}{y}\ dS$$

pro neomezenou množinu $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \frac{y}{2}\}$.

Řešení:
Zopakujme si, že pokud je v integrálu $\iint\limits_E f\ dS$ funkce f nebo oblast E integrace neomezená, pak je takový integrál určen (jako konečná) hodnota, pouze pokud je tzv. *absolutně konvergentní*, tj. pokud

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{E_n} |f|\ dS =: \iint\limits_E |f|\ dS < \infty$$

pro nějakou posloupnost omezených oblastí $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$ takovou, že f na E_n je omezená a $E = \cup_n E_n$.

V našem případě tedy máme $f(x,y) = xe^{-y}\frac{\sin y}{y}$. Nejdříve potřebujeme ověřit existenci zadaného integrálu, tj. absolutní konvergenci. Na E máme

$$\left|xe^{-y}\frac{\sin y}{y}\right| \le xe^{-y}.$$

Pro tuto nezapornou funkci (tzv. *majorantu*) můžeme tedy použít Fubiniho větu (pokud nám při postupneé integraci nakonec vyjde konečná hodnota):

$$\iint\limits_E xe^{-y}\ dS = \int_0^\infty\int_0^{\frac{y}{2}} xe^{-y}\ dx\ dy = \int_0^\infty \frac{y^2}{8}e^{-y}\ dy = \int_0^\infty \left(\frac{y^2}{8}e^{-\frac{y}{2}}\right)e^{-\frac{y}{2}}\ dy \le \int_0^\infty K\cdot e^{-\frac{y}{2}}\ dy < \infty$$

kde jsme použili to, že $|\frac{y^2}{8}e^{-\frac{y}{2}}| \le K$ pro vhodnou konstantu $K > 0$ (tato funkce je spojitá a jde k nule v nekonečnu).

Integrál z $|f|$ je proto konečný a my tak můžeme použít Fubiniho větu (v analogické podobě jako pro omezenou funkci na omezené množině). Můžeme proto psát:

$$\iint\limits_E xe^{-y}\frac{\sin y}{y}\ dS = \int_0^\infty\int_0^{\frac{y}{2}} xe^{-y}\frac{\sin y}{y}\ dx\ dy = \frac{1}{8}\int_0^\infty y(e^{-y}\sin y)\ dy =$$

$$= \left[\begin{smallmatrix} g(y)=y, & g'(y)=1 \\ h'(y)=e^{-y}\sin y, & h(y)=-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y+\sin y)\end{smallmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\Big[y(-\frac{e^{-y}}{2})(\cos y+\sin y)\Big]_0^\infty - \frac{1}{8}\int_0^\infty -\frac{e^{-y}}{2}(\cos y+\sin y)\ dy =$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^\infty e^{-y}(\cos y+\sin y)\ dy = \frac{1}{16}\Big[-e^{-y}\cos y\Big]_0^\infty = \frac{1}{16}.$$

Poznámka: K odvození neučitých integrálů jsme použili následující postup (jednodušší než opakovaná metoda per partes) využívající funkce komplexní proměnné:

$$\int e^{-y}\cos y\ dy + \mathbf{i}\int e^{-y}\sin y\ dy = \int e^{-y}(\cos y + \mathbf{i}\sin y)\ dy = \int e^{-y}e^{\mathbf{i}y}\ dy =$$

$$= \int e^{(\mathbf{i}-1)y}\ dy = \frac{e^{(\mathbf{i}-1)y}}{\mathbf{i}-1} + C = -\frac{\mathbf{i}+1}{2}e^{-y}(\cos y + \mathbf{i}\sin y) + C =$$

$$= \left[-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y - \sin y)\right] + \mathbf{i}\left[-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y + \sin y)\right] + C.$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí pak dostáváme:

$$\int e^{-y}\cos y\ dy = -\frac{e^{-y}}{2}(\cos y - \sin y) + C_1$$

a

$$\int e^{-y}\sin y\ dy = -\frac{e^{-y}}{2}(\cos y + \sin y) + C_2,$$

kde C_1, C_2 a C jsou konstanty.

Integrály lze odvodit ještě "heuristicky"- primitivní funkce bude nejspíš obsahovat $e^{-y}\cos y$ a $e^{-y}\sin y$. Zkusíme si je tedy zderivovat:

$$\frac{d}{dy}\left(e^{-y}\cos y\right) = -e^{-y}(\sin y + \cos y)$$

$$\frac{d}{dy}\left(e^{-y}\sin y\right) = -e^{-y}(\sin y - \cos y)$$

a integrály z původních funkcí teď najdeme prostě jen lineární kombinací rovnic:

$$e^{-y}\sin y = \frac{d}{dy}\left(-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y + \sin y)\right)$$

$$e^{-y}\cos y = \frac{d}{dy}\left(-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y - \sin y)\right).$$

10.2 Použijte substituci $u = x + 2y$, $v = x - y$ pro výpočet integrálu

$$\int_0^{\frac{2}{3}}\int_y^{2-2y}(x+2y)e^{y-x}\ dx\ dy.$$

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le \frac{2}{3}, \quad y \le x \le 2 - 2y.$$

Jde o trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ a $(2,0)$. Substituce Φ je lineární zobrazení, které je zadáno svou inverzí, tedy

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Phi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Trojúhelník lze vyjádřit jako tzv. *konvexní obal* ze svých vrcholů (tj. nejmenší konvexní množinu, která obsahuje dané vrcholy - pro body $A_1, \dots, A_n$ je konvexní obal $[A_1, \dots, A_n]_\alpha$ dán jako

$$[A_1, \dots, A_n]_\alpha = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \mid 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n \ \& \ \sum_{i-1}^{n} \lambda_i = 1\}).$$

Protože (prosté) lineární zobrazení Φ konvexní obaly zachovává, je množina U taková, že $\Phi(U) = E$, daná také jako konvexní obal z vrcholů

$$\Phi^{-1}(0,0) = (0,0)$$

$$\Phi^{-1}\Big(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\Big) = (2,0)$$

$$\Phi^{-1}(2,0) = (2,2).$$

Tedy

$$U: \quad 0 \leq v \leq u, \quad\quad 0 \leq u \leq 2.$$

Dále je $(\Phi^{-1})' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\det \Phi' = \frac{1}{\det(\Phi^{-1})'} = -\frac{1}{3}$. Po substituci pak máme

$$\int_0^{\frac{2}{3}} \int_y^{2-2y} (x+2y)e^{y-x} \, dx \, dy = \iint_{E=\Phi(U)} (x+2y)e^{y-x} \, dS = \iint_U ue^{-v} \cdot \frac{1}{3} \, dS =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 \int_0^u ue^{-v} \, dv \, du = \frac{1}{3} \int_0^2 u\Big[-e^{-v}\Big]_{v=0}^{v=u} du = \frac{1}{3} \int_0^2 u(1-e^{-u}) \, du = \frac{1}{3}\Big[\frac{u^2}{2} + (u+1)e^{-u}\Big]_0^2 =$$

$$= 1 + e^{-2}.$$

10.3 Vypočítejte integrál

$$\iint_E \frac{y}{x} e^{xy} \, dS$$

pro množinu E v prvním kvadrantu omezenou křivkami $xy = 2$, $xy = 4$, $y = 2x$ a $y = \frac{x}{2}$.

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad 0 < x, y, \quad \frac{x}{2} \leq y \leq 2x. \quad \frac{2}{x} \leq y \leq \frac{4}{x}$$

neboli

$$E: \quad 0 < x, y, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 2, \quad 2 \leq xy \leq 4.$$

Vzhledem ke tvaru oblasti i funkce bude výhodné zavést nové souřadnice

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{a} \quad v = xy$$

(které odpovídají přímkám procházející počátkem a hyperbolám). Předpis pro nové proměnné ale odpovídá předpokládané inverzi zobrazení Φ, které použijeme pro substituci do našeho integrálu. Měli bychom tedy ještě ověřit, jestli toto zobrazení Φ vůbec existuje a jestli je prosté - vyjádříme tudíž proměnné x a y pomocí proměnných u a v a dostaneme tak (za předpokladu, že $x, y > 0$)

$$x = \sqrt{\frac{v}{u}} \quad \text{a} \quad y = \sqrt{uv}.$$

Definujeme si tedy zobrazení

$$\Phi : (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \Phi(u, v) = \left(\sqrt{\frac{v}{u}}, \sqrt{uv}\right)$$

jehož inverze je

$$\Phi^{-1} : (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \Phi^{-1}(x, y) = \left(\frac{y}{x}, xy\right).$$

Determinant Φ' se snadněji spočítá pomocí inverzního zobrazení (kde se nevyskytují odmocniny):

$$(\Phi^{-1})' = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix}, \qquad \det(\Phi^{-1})' = -2\frac{y}{x}$$

a tedy

$$\det \Phi'_{|(u,v)} = \frac{1}{\det(\Phi^{-1})'_{\,|\Phi(u,v)}} = -\frac{1}{2u}.$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U : \quad \frac{1}{2} \le u \le 2, \qquad 2 \le v \le 4.$$

Můžeme tedy psát

$$\iint\limits_{E=\Phi(U)} \frac{y}{x} e^{xy}\, dS = \iint\limits_{U} u e^{v} \left| -\frac{1}{2u} \right| dS = \frac{1}{2} \int_2^4 \int_{\frac{1}{2}}^{2} e^{v}\, du\, dv = \frac{3}{4}(e^4 - e^2).$$

10.4 Najděte hmotnost a polohu těžiště

(i) trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(4, 0)$, jehož hustota je rovna $\rho(x, y) = x$.

(ii) části roviny ohraničené parabolou $y = 9 - x^2$ a osou x, jejíž hustota je rovna $\rho(x, y) = y$.

Řešení:
(i) Oblast integrace je

$$E : \quad 0 \le y \le 1, \qquad y \le x \le 4 - 3y.$$

Jednotlivé integrály tedy jsou

hmotnost:

$$m = \iint\limits_{E} \rho\, dS = \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} x\, dx \Big)\, dy = \int_0^1 \Big[\frac{x^2}{2} \Big]_{x=y}^{x=4-3y} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (3y - 4)^2 - y^2\, dy = \frac{1}{2} \Big[\frac{(3y-4)^3}{9} - \frac{y^3}{3} \Big]_0^1 = \frac{10}{3}$$

x-ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m}\iint\limits_E x\rho(x,y)\ dS = \frac{3}{10}\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_y^{4-3y} x^2\ dx\Big)\ dy = \frac{1}{10}\int\limits_0^1 \Big[x^3\Big]_{x=y}^{x=4-3y}\ dy =$$

$$= \frac{1}{10}\int\limits_0^1 (4-3y)^3 - y^3\ dy = \Big[-\frac{(4-3y)^4}{120} - \frac{y^4}{40}\Big]_0^1 = \frac{21}{10}$$

y-ová souřadnice těžiště:

$$T_2 = \frac{1}{m}\iint\limits_E y\rho(x,y)\ dS = \frac{3}{10}\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_y^{4-3y} xy\ dx\Big)\ dy = \frac{3}{20}\int\limits_0^1 \Big[x^2 y\Big]_{x=y}^{x=4-3y}\ dy =$$

$$= \frac{3}{20}\int\limits_0^1 y(4-3y)^2 - y^3\ dy = \frac{12}{5}\int\limits_0^1 y^3 - 3y^2 + 2y\ dy = \frac{12}{5}\Big[\frac{y^4}{4} - y^3 + y^2\Big]_0^1 = \frac{3}{5}.$$

(ii) Oblast integrace je

$$E: \quad -3 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 9 - x^2.$$

hmotnost:

$$m = \iint\limits_E \rho\ dS = \int\limits_{-3}^3 \Big(\int\limits_0^{9-x^2} y\ dy\Big)\ dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-3}^3 \Big[y^2\Big]_0^{9-x^2}\ dx = \int\limits_0^3 (x^2-9)^2\ dx =$$

$$= \Big[\frac{x^5}{5} - 6x^3 + 81y\Big]_0^3 = \frac{648}{5}$$

x-ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m}\iint\limits_E x\rho(x,y)\ dS = \frac{1}{m}\int\limits_{-3}^3 x\Big(\int\limits_0^{9-x^2} y\ dy\Big)\ dx = 0$$

(je to lichá funkce na množině symetrické podle osy y)

y-ová souřadnice těžiště:

$$T_2 = \frac{1}{m}\iint\limits_E y\rho(x,y)\ dS = \frac{1}{m}\int\limits_{-3}^3 \Big(\int\limits_0^{9-x^2} y^2\ dy\Big)\ dx = \frac{1}{3m}\int\limits_{-3}^3 \Big[y^3\Big]_0^{9-x^2}\ dx =$$

$$= \frac{2}{3m}\int\limits_0^3 (3^2 - x^2)^3\ dx = \frac{5}{3\cdot 324}\Big[3^6 x - 3^4 x^3 + \frac{3^3}{5}x^5 - \frac{x^7}{7}\Big]_0^3 = \frac{36}{7}.$$

10.5 Vypočtěte

$$\iiint\limits_E y\ dV,$$

kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$ a leží nad oblastí v rovině $z = 0$ ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

Řešení:
Oblast integrace je
$$E: \quad 0 \leq z \leq x + 2y, \quad 0 \leq y \leq x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$
I zde platí

Fubiniho věta (pro trojný integrál): Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce integrabilní v absolutní hodnotě (např. spojitá a omezená). Pak
$$\iiint_E f\ dV = \iint_{\pi(E)} \Big(\int_{(\{x\}\times\{y\}\times\mathbb{R})\cap E} f(x,y,z)\ dz \Big)\ dS,$$
kde $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je projekce, $\pi(x,y,z) = (x,y)$ a dS znamená integraci podle zbylých proměnných, tj. x a y.

$$\iiint_E y\ dV = \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y\ dz\ dy\ dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} y(x+2y)\ dy\ dx = \int_0^1 \Big[\frac{y^2}{2}x + \frac{2y^3}{3}\Big]_{y=0}^{y=x^2}\ dx =$$
$$= \int_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3}\ dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{5}{28}.$$

10.6 Vypočtěte
$$\iiint_E xyz\ dV,$$
kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

Řešení:
Oblast integrace je
$$E: \quad 0 \leq z \leq xy, \quad x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$
Máme tedy
$$\iiint_E xyz\ dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{xy} xyz\ dz\ dy\ dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2}\ dy\ dx = \frac{1}{8}\int_0^1 x^5 - x^{11}\ dx =$$
$$= \frac{1}{8}(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}) = \frac{1}{96}.$$

10.7 Vypočtěte
$$\iiint_E xy\ dV,$$

kde E je čtyrstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ a $(0,1,1)$.

Řešení:
Oblast integrace E je množina ohraničená rovinami $x=0$, $y=1$, $z=0$ a $z=y-x$. Tedy můžeme psát např.

$$E: \quad 0 \leq z \leq y-x, \quad 0 \leq x \leq y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Máme tedy

$$\iiint\limits_E xy \; dV = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{y-x} xy \; dz \; dx \; dy = \int_0^1 \int_0^y y^2 x - x^2 y \; dx \; dy = \int_0^1 \left[y^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{3} \; dy = \left[\frac{y^5}{30} \right]_0^1 = \frac{1}{30}.$$