11. cvičení z Matematiky 2

2. - 6. května 2016

11.1 Vypočtěte

$$\iiint\limits_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}\ dV,$$

kde $E: \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

Řešení:
Věta o substituci má analogický tvar a podmínky (pouze "zanedbatelné" množiny nyní zahrnují i plochy, roviny atd.):

$$\iiint\limits_{\Phi(U)} f\ dV = \iiint\limits_U (f\circ\Phi)\cdot|\det\Phi'|\ dV.$$

Použijeme *sférické souřadnice*:

$$\Psi : \langle 0,+\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0,\pi\rangle \to \mathbb{R}^3, \qquad \text{kde} \qquad \Psi : \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array} .$$

Poznámka: Sférické souřadnice jsou složením dvou (upravených) cylindrických souřadnic a sice:

$$\Psi = \Phi_2\circ\Phi_1$$

$$\Phi_1 : \begin{array}{rcl} \tilde r &=& r\sin\vartheta \\ \tilde\varphi &=& \varphi \\ \tilde z &=& r\cos\vartheta \end{array} , \quad \Phi_2 : \begin{array}{rcl} x &=& \tilde r\cos\tilde\varphi \\ y &=& \tilde r\sin\tilde\varphi \\ z &=& \tilde z \end{array}$$

takže pro determinant máme

$$\det\Psi' = \det(\Phi_2)'_{|\Phi_1}\cdot\det(\Phi_1)' = \tilde r_{|\Phi_1}\cdot r = (r\sin\vartheta)\cdot r = r^2\sin\vartheta.$$

Zvolíme si parametrizaci koule $E = \Psi(U)$ jako

$$U: \quad 0\leq r\leq 1 \quad \& \quad 0\leq\varphi\leq 2\pi \quad \& \quad 0\leq\vartheta\leq\pi\ .$$

Takže můžeme psát

$$\iiint\limits_{E=\Psi(U)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-4z+4}}\ dV = \iiint\limits_U \frac{r^2\sin\vartheta}{\sqrt{r^2-4r\cos\vartheta+4}}\ dV =$$

$$= \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{r^2\sin\vartheta}{\sqrt{r^2-4r\cos\vartheta+4}}\ d\varphi\ d\vartheta\ dr = 2\pi\int_0^1\int_0^\pi \frac{r^2\sin\vartheta}{\sqrt{r^2-4r\cos\vartheta+4}}\ d\vartheta\ dr =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \left[r\frac{\sqrt{r^2-4r\cos\vartheta+4}}{2}\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} dr = \pi\int_0^1 r\Big(\sqrt{r^2+4r+4}-\sqrt{r^2-4r+4}\Big)\ dr =$$

$$= \pi\int_0^1 r\Big(|r+2|-|r-2|\Big)\ dr = \pi\int_0^1 r\Big(r+2-(2-r)\Big)\ dr = 2\pi\int_0^1 r^2\ dr = \frac{2}{3}\pi.$$

11.2 Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: \quad x^2+y^2+z^2 \le R^2 \quad \& \quad z\cdot\tan(\alpha) \ge \sqrt{x^2+y^2},$$

s hustotou $\rho = 1$, kde $R > 0$ a $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ jsou parametry.

Řešení:
Těleso E je průnikem koule o poloměru R a kužele s vrcholovým úhlem 2α, jehož špička je ve středu koule. Výhodné tedy bude použít opět sférické souřadnice

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x &=& r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &=& r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

Parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: \quad 0 \le r \le R \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \alpha$$

Pro těžiště musíme nejdříve spočítat hmotnost:

$$m = \iiint\limits_{E=\Psi(U)} 1\ dV = \iiint\limits_{U} r^2\sin\vartheta\ dV = \int_0^R\int_0^\alpha\int_0^{2\pi} r^2\sin\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta\ dr =$$

$$= 2\pi\int_0^R\int_0^\alpha r^2\sin\vartheta\ d\vartheta\ dr = 2\pi(1-\cos\alpha)\int_0^R r^2\ dr = \frac{2}{3}\pi R^3(1-\cos\alpha).$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m}\iiint\limits_{E=\Psi(U)} z\ dV = \frac{1}{m}\iiint\limits_{U} r^3\cos\vartheta\sin\vartheta\ dV = \frac{1}{m}\int_0^R\int_0^\alpha\int_0^{2\pi} r^3\frac{\sin 2\vartheta}{2}\ d\varphi\ d\vartheta\ dr =$$

$$= \frac{\pi}{m}\Big(\int_0^R r^3\ dr\Big)\cdot\Big(\int_0^\alpha \sin 2\vartheta\ d\vartheta\Big) = \frac{\pi R^4}{8m}(1-\cos 2\alpha) = \frac{3R}{16}\cdot\frac{1-\cos 2\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{3R}{8}(1+\cos\alpha).$$

11.3 Určete těžiště homogenniho kužele s výškou $h > 0$ a poloměrem podstavy $R > 0$.

Řešení:
Kužel

$$E: \quad 0 \le z \le H \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2} \le \frac{R}{h}\cdot z,$$

tentokrát pro změnu zintegrujeme tak, že ho nejdříve rozřežeme horizontálně na kruhy a ty pak zintegrujeme v závislosti na výšce. Využijeme známý vzorec na obsah kruhu o daném poloměru.

hmotnost:

$$m = \iiint\limits_{E} 1\ dV = \int_0^h\Big(\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le\frac{R}{h}\cdot z} 1\ dxdy\Big)\ dz = \int_0^h \pi\frac{R^2}{h^2}\cdot z^2\ dz = \frac{\pi}{3}R^2h$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m}\iiint\limits_E z\ dV = \frac{1}{m}\int\limits_0^h \Big(\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le \frac{R}{h}\cdot z} z\ dxdy \Big)\ dz = \frac{1}{m}\int\limits_0^h \pi\frac{R^2}{h^2}\cdot z^3\ dz = \frac{1}{m}\frac{\pi}{4}R^2h^2 = \frac{3}{4}h\ .$$

Z postupu je vidět, že při integraci záleží pouze na ploše horizontálních řezů (přesněji na závislosti plochy na výšce) a tedy stejný výsledek (těžiště je ve čtvrtině výšky nad podstavou) dostaneme pro "kužel"s jakýmkoliv tvarem podstavy (např. pyramidu atd.).

11.4 Vypočtěte

$$\int\limits_{-2}^{2}\ \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\ \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\ dz\ dy\ dx.$$

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad |x|\le 2 \quad \& \quad |y| \le \sqrt{4-x^2} \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2$$

neboli

$$E: \quad x^2\le 4 \quad \& \quad x^2+y^2 \le 4 \quad \& \quad \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2$$

a tedy

$$E: \quad \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2,$$

což je kužel s výškou 2 a poloměrem podstavy také 2, který stojí na svém vrcholu v počátku. K výpočtu integrálu použijeme *cylindrické souřadnice*:

$$\Phi : \langle 0,+\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \text{kde} \quad \Phi: \begin{array}{ccc} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \\ z & = & z \end{array}$$

tj.

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det\Phi' = r\ .$$

Jako parametrizaci E si vezmeme

$$U: \quad 0\le r\le z\le 2 \quad \& \quad 0\le\varphi\le 2\pi\ .$$

Můžeme tedy psát

$$\int\limits_{-2}^{2}\ \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\ \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\ dz\ dy\ dx = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2)\ dV =$$

$$= \iiint\limits_U r^2\cdot r\ dV = \int\limits_0^2\int\limits_0^z\int\limits_0^{2\pi} r^3\ d\varphi\ dr\ dz = 2\pi\int\limits_0^2\int\limits_0^z r^3\ \ dr\ dz =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^2 z^4 \ \ dz = \frac{\pi}{10}\cdot 2^5 = \frac{16}{5}\pi.$$

11.5 Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1 \quad \& \quad x,y,z\geq 0,$$

s hustotou $\rho = 1$, kde $a, b, c > 0$ jsou parametry.

Řešení:
Oblast integrace E je osmina obecného elipsoidu. Použijeme proto upravené sférické souřadnice Φ (které parametrizují tento elipsoid):

$$\Phi: \quad \begin{array}{rcl} x/a &=& r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y/b &=& r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z/c &=& r\cos\vartheta \end{array},$$

které vzniknou složením "klasických" sférických souřadnic Ψ a lineární transformace $\mathcal{L}$, která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi = \mathcal{L}\circ\Psi, \qquad \mathcal{L}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) := (a\tilde{x}, b\tilde{y}, c\tilde{z}).$$

Máme tedy

$$\Phi' = \mathcal{L}'_{|\Phi}\circ\Psi' \quad \text{a} \quad \det\Phi' = (\det\mathcal{L}'_{|\Phi})\cdot(\det\Psi') = abc\cdot r^2\sin\vartheta,$$

protože

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je

$$U: \quad 0\leq r\leq 1 \quad \& \quad 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0\leq\vartheta\leq\frac{\pi}{2}.$$

Výpočet hmotnosti E si usnadníme znalostí objemu koule K o poloměru 1 a toho, že objem E je jedna osmina objemu celého elipsoidu F. Protože $F = \mathcal{L}(K)$, máme:

$$m = \iiint\limits_E 1\ dV = \frac{1}{8}\iiint\limits_{F=\mathcal{L}(K)} 1\ dV = \frac{1}{8}\iiint\limits_K |\det\mathcal{L}'|\ dV =$$

$$= \frac{abc}{8}\iiint\limits_K 1\ dV = \frac{abc}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi = \frac{\pi abc}{6}.$$

Pro zjištění těžiště $T = (T_1, T_2, T_3)$ se nyní stačí omezit jen na jednu složku (např. T_3), protože ostatní lze analogicky získat příslušným natočením elipsoidu do daného směru a zopakováním výpočtu. Máme tedy

$$T_3 = \frac{1}{m}\iiint\limits_{E=\Phi(U)} z\ dV = \frac{1}{m}\iiint\limits_U (cr\cos\vartheta)\cdot(abcr^2\sin\vartheta)\ dV =$$

$$= \frac{3c}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\sin 2\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta\ dr = \frac{3c}{\pi}\Big(\int\limits_0^1 r^3\ dr\Big)\cdot\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\vartheta\ d\vartheta\Big)\cdot\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ d\varphi\Big) = \frac{3}{8}c.$$

Podobně tedy budeme mít $T_1 = \frac{3}{8}a$ a $T_2 = \frac{3}{8}b$.

11.6 Vypočtěte moment setrvačnosti rotačního paraboloidu E o výšce h a poloměru postavy R vzhledem k ose, která prochází těžištěm E a je kolmá k ose rotační symetrie paraboloidu E (tzv. *ekvatoriální moment*).

Řešení:
Oblast integrace je

$$E: \quad \frac{h}{R^2}(x^2+y^2) \le z \le h.$$

Určíme těžiště tělesa E pomocí cylindrických souřadnic

$$\Phi: \begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi \\ y &=& r\sin\varphi \\ z &=& z \end{array}$$

a parametrizace $E = \Phi(U)$

$$U: \quad \frac{hr^2}{R^2} \le z \le h \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ .$$

hmotnost:

$$m = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} 1\ dV = \iiint\limits_U r\ dV = \int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^h \int_0^{2\pi} r\ d\varphi\ dz\ dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R r\Big(h - \frac{hr^2}{R^2}\Big)\ dr = 2\pi h\Big[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\Big]_0^R = \frac{\pi h R^2}{2}.$$

Těleso E je rotačně symetrické podle osy z, takže je potřeba určit pouze z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m}\iiint\limits_{E=\Phi(U)} z\ dV = \frac{1}{m}\iiint\limits_U zr\ dV = \frac{1}{m}\int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^h \int_0^{2\pi} zr\ d\varphi\ dz\ dr =$$

$$= \frac{4}{hR^2}\int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^h zr\ dz\ dr = \frac{2}{hR^2}\int_0^R r\Big(h^2 - \frac{h^2r^4}{R^4}\Big)\ dr = \frac{2h}{R^2}\Big[\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6R^4}\Big]_0^R = \frac{2}{3}h.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé na osu z a procházející těžištěm nebude (vzhledem k symetrii tělesa E podle osy z) záviset na konkrétní volbě směru této osy. Zvolíme si ji tedy např. rovnoběžnou s osou x - tj. osa p bude mít rovnice $y = 0$ a $z = \frac{2}{3}h$. Hledaný moment setrvačnosti pak bude

$$M = \iiint\limits_E \Big(\rho_p(x,y,z)\Big)^2\ dV,$$

kde $\rho_p(x,y,z) = \sqrt{y^2 + \Big(z - \frac{2}{3}h\Big)^2}$ je vzdálenost bodu (x,y,z) od přímky p.

K výpočtu momentu použijeme opět transformaci Φ:

$$M = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} y^2 + \Big(z - \frac{2}{3}h\Big)^2\ dV = \iiint\limits_U r^3\sin^2\vartheta + r\Big(z - \frac{2}{3}h\Big)^2\ dV =$$

$$= \int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^h \int_0^{2\pi} r^3\sin^2\vartheta + r\Big(z - \frac{2}{3}h\Big)^2\ d\varphi\ dz\ dr = \pi\int_0^R \int_{\frac{hr^2}{R^2}}^h r^3 + 2r\Big(z - \frac{2}{3}h\Big)^2\ dz\ dr =$$

$$
\boxed{\begin{aligned}
&= \pi \int\limits_0^R hr^3\Big(1-\frac{r^2}{R^2}\Big)+\frac{2}{3}r\Big[\Big(z-\frac{2}{3}h\Big)^3\Big]_{z=\frac{hr^2}{R^2}}^{z=h}\,dr = \pi h\int\limits_0^R r^3-\frac{r^5}{R^2}+\frac{2}{81}rh^2-\frac{2}{3}h^2r\Big(\frac{r^2}{R^2}-\frac{2}{3}\Big)^3\,dr = \\
&= \pi h\Big(\frac{R^4}{4}-\frac{R^4}{6}+\frac{R^2h^2}{81}-\Big[\frac{h^2R^2}{12}\Big(\frac{r^2}{R^2}-\frac{2}{3}\Big)^4\Big]_0^R\Big) = \frac{\pi h R^2}{12}\Big(R^2+\frac{h^2}{3}\Big).
\end{aligned}}
$$