12. cvičení z Matematiky 2

9. - 13. května 2016

12.1 Integrujte funkci $f(x,y) = \frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}$ podél křivky Γ: $y = \frac{x^2}{2}$ od bodu $A = (1, \frac{1}{2})$ do bodu $B = (0,0)$.

Řešení:
Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int_\Gamma f\ ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot ||\varphi'(t)||\ dt,$$

kde φ je vhodná parametrizace křivky Γ, tj. zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, které je

- spojité a po částech spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ (to abychom mohli křivky navazovat na sebe),
- φ je prosté na $\langle a, b\rangle$ až na konečně mnoho vyjímek $t_1, \ldots, t_n \in \langle a, b\rangle$ (křivka může protínat sama sebe),
- $\varphi(\langle a, b\rangle) = \Gamma$.

Jako parametrizaci si zvolíme $\varphi(t) = \left(1 - t, \frac{(1-t)^2}{2}\right)$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$, které zřejmě splňuje všechny uvedené podmínky. Pak je

$$\varphi'(t) = (-1, t-1) \quad \text{a} \quad ||\varphi'(t)|| = \sqrt{1 + (t-1)^2}.$$

Takže

$$\int_\Gamma f\ ds = \int_0^1 \frac{1 - t + \frac{(1-t)^4}{4}}{\sqrt{1 + (1-t)^2}} \cdot \sqrt{1 + (t-1)^2}\ dt = \int_0^1 1 - t + \frac{(1-t)^4}{4}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} u=1-t \\ du=-dt \end{smallmatrix}\right] =$$

$$= -\int_1^0 u + \frac{u^4}{4}\ du = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20}.$$

12.2 Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\Gamma (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\ ds,$$

kde Γ je asteroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, s parametrem $a > 0$.

Řešení:
Rovnice asteroidy se podobá rovnici kružnice, až na jiné exponenty. Zparametrizujeme ji proto upravenými polárními souřadnicemi, které budou mít také vhodné exponenty:

$$\varphi : \begin{array}{l} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = a \cdot \sin^3 t \end{array}$$

pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Pak je

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \Big(-3a\cos^2 t \cdot \sin t,\ 3a\sin^2 t \cdot \cos t\Big)$$

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{(3a\cos t \cdot \sin t)^2 \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} = 3a\left|\cos t \cdot \sin t\right|.$$

Využijeme toho, že asteroida i funkce jsou symetrické podle souřadných os, takže stačí počítat jen na čtvrtině asteroidy:

$$\int_\Gamma (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\ ds = \int_0^{2\pi} a^{\frac{4}{3}} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \cdot 3a\left|\cos t \cdot \sin t\right|\ dt =$$

$$= 12 \cdot a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^5 t \cdot \sin t + \sin^5 t \cdot \cos t\right)\ dt = 2a^{\frac{7}{3}} \left[-\cos^6 t + \sin^6 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^{\frac{7}{3}}\ .$$

12.3 Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\Gamma xy\ ds,$$

kde $\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ & $x, y \geq 0$ s parametry $a \neq b$.

Řešení:
Křivka je jedna čtvtina elipsy a proto zvolíme na zparametrizování upravené polární souřadnice

$$\varphi : \begin{array}{l} \frac{x}{a} = \cos t \\ \\ \frac{y}{b} = \sin t \end{array}$$

pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Pak máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \Big(-a\sin t,\ b\cos t\Big)$$

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\ .$$

Takže

$$\int_\Gamma xy\ ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos t\sin t \cdot \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} u=a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t \\ du=2(a^2-b^2)\sin t\cos t\ dt \end{smallmatrix} \right] =$$

$$= \frac{ab}{2(a^2-b^2)} \int_{b^2}^{a^2} \sqrt{u}\ du = \frac{ab}{3(a^2-b^2)} \left[u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=b^2}^{u=a^2} = \frac{ab(a^3-b^3)}{3(a^2-b^2)} = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\ .$$

12.4 Částice se pohybuje tak, že poloha v čase t je určena jako $\varphi(t) = \left(\cos(t), \sin(t), \frac{t^2}{2}\right)$. Určete délku dráhy, kterou urazí v časovém intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Řešení:
Křivka leží v plášti válce $x^2 + y^2 = 1$ a je to postupně se roztahující šroubovice. Délka křivky Γ se pak vypočítá jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky

$$\ell(\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} 1\ ds = \int\limits_{a}^{b} ||\varphi'(t)||\ dt\ .$$

Máme tedy

$$\varphi'(t) = \big(-\sin(t), \cos(t), t \big)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + t^2} = \sqrt{1+t^2},$$

takže dostáváme

$$\ell(\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} 1\ ds = \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+t^2}\ dt = \left[{\scriptstyle t=\sinh(\alpha) \atop dt=\cosh(\alpha)d\alpha} \right] = \int\limits_{0}^{\operatorname{arcsinh}(1)} \sqrt{1+\sinh^2(\alpha)} \cdot \cosh(\alpha)\ d\alpha =$$

$$= \int\limits_{0}^{\operatorname{arcsinh}(1)\,=\,\ln(1+\sqrt{1+1^2})} \cosh^2(\alpha)\ d\alpha = \int\limits_{0}^{\ln(1+\sqrt{2})} \left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right)^2 d\alpha = \frac{1}{4} \int\limits_{0}^{\ln(1+\sqrt{2})} 2 + e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}\ d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{8}\Big[e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}\Big]_{\alpha=0}^{\alpha=\ln(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{8}\left((1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{8}\left(3+2\sqrt{2} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\ .$$

Poznámka k substituci: Protože graf funkce $u = \sqrt{1+t^2}$ je částí hyperboly ($u^2 - t^2 = 1$), je vhodné použít substituci pomocí hyperbolických funkcí

$$\cosh(\alpha) = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} \quad \text{a} \quad \sinh(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}\ .$$

Jde o rozklad funkce e^{α} na sudou a lichou funkci, tj. $e^{\alpha} = \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)$. Podobně se pro parametrizaci kružnice $u = \sqrt{1-t^2}$ zase používají goniometrické funkce $\sin(\alpha)$ a $\cos(\alpha)$. Také vztahy vypadají v něčem podobně:

$\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1,$	$\sinh'(\alpha) = \cosh(\alpha)$
$\cosh^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha) = \cosh(2\alpha),$	$\cosh'(\alpha) = \sinh(\alpha)$

Vyřešením kvadratické rovnice dostaneme vyjádření inverzní funkce pro $t = \sinh(\alpha)$:

$$\operatorname{arcsinh}(\alpha) = \ln\Big(t + \sqrt{1+t^2}\Big).$$