13. cvičení z Matematiky 2

16. května - 20. května 2016

13.1 Najděte velikost plochy

(i) části roviny $x + 2y + z = 4$, která leží uvnitř válce $x^2 + y^2 = 4$,

(ii) paraboloidu $z = x^2 + y^2$, která leží pod rovinou $z = 9$.

Řešení:
Plocha je určena jako $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 4 \ \& \ x^2 + y^2 \leq 4\}$. Její obsah spočítáme podle vztahu

$$\iint\limits_M 1 \; dS = \iint\limits_U \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \; dS,$$

kde Φ je vhodná parametrizace plochy M, tj. zobrazení $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^2$, které je

- spojitě diferencovatelné a prosté na U°,
- $\Phi(U) = M$
- matice Φ' má hodnost 2 na U° (neboli $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \neq 0$ na U°).

(i) Protože plocha M je grafem funkce $f(x, y) = 4 - x - 2y$ s definičním oborem

$$U : \quad x^2 + y^2 \leq 4,$$

jako parametrizaci si jednoduše zvolíme

$$\Phi(x, y) = \Big(x, y, f(x, y)\Big) = (x, y, 4 - x - 2y)$$

pro $(x, y) \in U$.

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, -1) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, -2)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1, 2, 1) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{6},$$

takže Φ zřejmě splňuje všechny uvedené podmínky.

Můžeme tedy psát

$$\iint\limits_M 1 \; dS = \iint\limits_U \sqrt{6} \; dS = \sqrt{6} \iint\limits_U 1 \; dS = \sqrt{6} \cdot 4\pi,$$

protože obsah kruhu U o poloměru 2 je 4π.

(ii) Plocha je určena jako

$$M : \quad x^2 + y^2 = z \ \ \& \ \ z \leq 9.$$

Jako parametrizaci si zvolíme

$$\Phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2 + y^2 \leq 9.$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}.$$

Takže

$$\iint_M 1 \; dS = \iint_U \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} \; dS = \left[\substack{x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ (r,\varphi) \in \langle 0,3\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle} \right] = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r\sqrt{4r^2 + 1} \; dr \; d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^3 r\sqrt{4r^2 + 1} \; dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \; d\varphi \right) = \left[\frac{(4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{12} \right]_0^3 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}(37^{\frac{3}{2}} - 1).$$

13.2 Spočítejte

$$\iint_M z \; dS,$$

kde M je částí válce $x^2 + y^2 = 1$ mezi rovinami $z = 0$ a $z = x + 1$.

Řešení:
Integrál z funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je určený jako

$$\iint_M f \; dS = \iint_U f(\Phi(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \; dS \;,$$

kde Φ je opět vhodná parametrizace.

Plocha je určena jako

$$M: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad 0 \leq z \leq x + 1.$$

Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq z \leq 1 + \cos\varphi.$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial z}=(\cos\varphi,\sin\varphi,0)\qquad\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\|=1.$$

Takže pro funkci $f(x,y,z)=z$ máme

$$\iint\limits_M f\ dS=\iint\limits_U z\ dS=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1+\cos\varphi} z\ dz\ d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\frac{(1+\cos\varphi)^2}{2}\ d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{2}+\cos\varphi+\frac{\cos^2\varphi}{2}\Big)\ d\varphi=$$

$$=\pi+0+\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi.$$

13.3 Spočítejte

$$\iint\limits_M yz\ dS,$$

kde M je povrch popsaný parametricky rovnicemi $x=uv$, $y=u+v$, $z=u-v$ a $u^2+v^2\leq 1$.

Řešení:
Plochu máme nyní definovanou jako $M=\Phi(U)$, kde

$$U:\quad u^2+v^2\leq 1$$

a $\Phi:U\to\mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u,v)=(uv,u+v,u-v).$$

Ověříme ještě, že Φ je skutečně parametrizace plochy M (tj. Φ je prosté a hodnost derivace Φ' je 2).

Prostota Φ plyne z toho, ze druhá a třetí souřadnice tohoto zobrazení (tj. $y=u+v$ a $z=u-v$) tvoří regulární lineární zobrazení (které je prosté). Hodnost derivace ověříme jako v předchozím případě pomocí vektorového součinu:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}=(v,1,1)$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial v}=(u,1,-1)$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}=(-2,v+u,v-u)\qquad\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\|=\sqrt{2(u^2+v^2)+4}\neq 0.$$

Pro integrál pak máme

$$\iint\limits_M yz\ dS=\iint\limits_U (u^2-v^2)\sqrt{2(u^2+v^2)+4}\ dS=\left[\begin{smallmatrix}u=r\cos\varphi\\ v=r\sin\varphi\\ (r,\varphi)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\end{smallmatrix}\right]=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 r^3(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\sqrt{2r^2+4}\ dr\ d\varphi=\Big(\int\limits_0^3 r^3\sqrt{2r^2+4}\ dr\Big)\cdot\Big(\int\limits_0^{2\pi}\cos 2\varphi\ d\varphi\Big)=0,$$

protože druhý integrál je nulový.

Poznámka: Můžeme ještě určit, jak vlastně plocha M vypadá. Z rovnic $y=u+v$ a $z=u-v$ dostaneme $u=\frac{z+y}{2}$ a $v=\frac{y-z}{2}$. Takže $x=uv=\frac{y^2-z^2}{4}$ a $1\geq u^2+v^2=\frac{z^2+y^2}{4}$. Celkově tedy máme vztahy

$$y^2-z^2=4x,\qquad y^2+z^2\leq 4$$

což je část hyperbolického paraboloidu (tj. sedlo) nacházející se uvnitř válce s osou x a poloměrem 2.

13.4 Spočítejte

$$\iint\limits_M x^2 z + y^2 z \; dS,$$

kde M je povrch polokoule $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Řešení:
Plochu $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \;\&\; z \geq 0\}$ parametrizujeme pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (2 \sin \vartheta \cos \varphi, 2 \sin \vartheta \sin \varphi, 2 \cos \vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dále máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-2 \sin \vartheta \sin \varphi, 2 \sin \vartheta \cos \varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = (2 \cos \vartheta \cos \varphi, 2 \cos \vartheta \sin \varphi, -2 \sin \vartheta).$$

Výpočet normy vektorového součinu si zjednodušíme tím, že si všimneme, že dané vektory jsou na sebe kolmé, tj. $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0$. Pak je

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = 4|\sin \vartheta|.$$

Máme tedy

$$\iint\limits_M x^2 z + y^2 z \; dS = \iint\limits_U (8 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta) \cdot 4|\sin \vartheta| \; dS = \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 32 \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \; d\vartheta \Big) \cdot \Big(\int_0^{2\pi} 1 \; d\varphi \Big) =$$

$$= 2\pi \Big[8 \sin^4 \vartheta \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 16\pi.$$

13.5 Najděte práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$ vykonané na částici podél křivky Γ s parametrizací $\varphi(t) = (t, t^2, t^4)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Její orientace je indukována touto parametrizací.

Řešení:
Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int\limits_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \; dt.$$

Máme

$$\varphi'(t) = (1, 2t, 4t^3)$$

a tedy

$$\int\limits_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (t^2 + t^4, t^4 + t, t + t^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 4t^3 \end{pmatrix} \; dt = \int_0^1 3t^2 + 5t^4 + 6t^5 \; dt = \Big[t^3 + t^5 + t^6 \Big]_0^1 = 3.$$

13.6 Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\vec{F}(x,y,z) = (2xy^3, 4x^2y^2)$ vykonané na částici podél křivky Γ, která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka Γ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

Řešení:
Máme tedy oblast

$$M: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq x^3.$$

Její hranicí je po částech diferencovatelná křivka, která má orientaci odpovídající použití Greenovy věty.

Podle Greenovy věty tedy pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ máme

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big)\, dS,$$

kde výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$. Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru"v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry"pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbyde jen "vír"na okraji oblasti.

Máme tedy

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8xy^2 - 6xy^2 = 2xy^2$$

a proto

$$\int\limits_{\Gamma = \partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big)\, dS = \iint\limits_{M} 2xy^2 \; dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^3} 2xy^2 \; dy \; dx = \int\limits_0^1 \frac{2}{3} x^{10} \; dx = \frac{2}{33}.$$

13.7 Dokažte, že následující pole jsou konzervativní a najděte jejich potenciál.

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y, \quad y^2 + x, \quad ze^z)$,

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = \Big(3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2}, \quad -\frac{1}{x+z}, \quad \frac{y}{(x+z)^2}\Big)$.

Řešení:
Práce síly $\vec{F}$ v oblasti U (tj. otevřené souvislé množině) z bodu A do bodu B nezávisí na dráze právě když pole má potenciál, tj. existuje funkce $f : U \to \mathbb{R}$, že $\operatorname{grad}(f) = \vec{F}$.

Pokud je oblast U navíc jednoduše souvislá (tj. jakákoliv uzavřená křivka v U se dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu), pak toto nastává právě když $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$ na celém U.

Příkladem jednoduše souvislé oblasti je $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Příkladem oblasti, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus$ "osa x" nebo torus (tj. "pneumatika").

V našem případě je oblastí celé $\mathbb{R}^3$, tedy jednoduše souvislá oblast. Pole rotace je definováno jako

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big)$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

(i) Po dosazení máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = (0-0, \quad 0-0, \quad 1-1) = \vec{0},$$

tedy rotace je nulová na celém $\mathbb{R}^3$ a pole $\vec{F}$ má potenciál.

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + x \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ze^z \ . \tag{3}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x,y,z) = \int (x^2+y)\ dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2 + x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x^3}{3} + xy + C(y,z)\Big) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = y^2.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int y^2\ dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Zatím tedy máme

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)\Big) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z\ dz = (z-1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z-1)e^z + K.$$

(ii) Podobně jako v předchozím příkladu máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{1}{(x+z)^2} - \frac{1}{(x+z)^2}, \quad \frac{2y}{(x+z)^3} - \frac{2y}{(x+z)^3}, \quad \frac{1}{(x+z)^2} - \frac{1}{(x+z)^2}\right) = \vec{0}.$$

Rotace je opět nulová na celém $\mathbb{R}^3$ a pole $\vec{F}$ má potenciál.

Pro potenciál f máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x+z} \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y}{(x+z)^2} \quad . \tag{6}$$

Začneme třeba druhou rovnicí:

$$f(x,y,z) = \int -\frac{1}{x+z}\ dy = -\frac{y}{x+z} + C(x,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na x a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do třetí rovnice

$$-\frac{y}{(x+z)^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(-\frac{y}{x+z} + C(x,z)\Big) = -\frac{y}{(x+z)^2} + \frac{\partial C}{\partial z}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Dostáváme $C(x,z) = D(x)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na x. Dostáváme tedy zatím

$$f(x,y,z) = -\frac{y}{x+z} + D(x)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{y}{x+z} + D(x)\Big) = \frac{y}{(x+z)^2} + \frac{\partial D}{\partial x}.$$

Takže $D(x) = \int 3x^2\ dx = x^3 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = -\frac{y}{x+z} + x^3 + K.$$

Poznámka: Jestliže pole $\vec{F}$ vznikne jako gradient f, pak jeho rotace je nulová a tato nulovost vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací funkce f. Nulová rotace je ale jen nutnou podmínkou pro existenci potenciálu v případě, že oblast není jednoduše souvislá, jak ukazuje příklad vektorového pole

$$\vec{F} = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\Big)$$

na množině $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \neq 0\}$, která není jednoduše souvislá.

Máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \Big(0, 0, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big) = \vec{0}$$

ale práce síly $\vec{F}$ podél kružnice $\Gamma : \varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$ je nenulová:

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_0^{2\pi} 1\ d\alpha = 2\pi.$$

Pole tedy nemá potenciál na celém U. Na druhé straně, na určitých podmnožinách U lze potenciál pole $\vec{F}$ nalézt, např.

$$f_1(x,y,z) = \mathrm{arctg}\Big(\frac{y}{x}\Big) \quad \text{na} \quad U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$$

nebo

$$f_2(x,y,z) = \mathrm{arccotg}\Big(\frac{x}{y}\Big) \quad \text{na} \quad U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}.$$