14. cvičení z Matematiky 2

23. května - 27. května 2016

14.1 Vypočtěte plošný integrál

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ a M je sféra $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ s vnější orientací a $R > 0$ je parametr.

Řešení:
Tok vektorového pole $\vec{F} : M \to \mathbb{R}^3$ orientovanou plochou $M \subseteq \mathbb{R}^3$ se spočítá jako

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}\big(\Phi(u,v)\big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) dS \ ,$$

kde $\Phi : U \to M$ je opět vhodná parametrizace, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, a orientace daná vektorovým polem $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ souhlasi se zadanou parametrizací plochy M. (Pokud by orientace nesouhlasila, stačí jen změnit pořadí ve vektorovém součinu, tj. změnit znaménko integrálu.)

Integrál spočítáme podle definice (ale lze použít i Gaussovu větu, protože jde o uzavřenou plochu). Plochu M zparametrizujeme přirozeně pomocí posunutých sférických souřadnic:

$$\Phi : \quad \begin{aligned} x - a &= R \sin\vartheta \cos\varphi \\ y - b &= R \sin\vartheta \sin\varphi \\ z - c &= R \cos\vartheta \end{aligned}$$

s definičním oborem

$$U : \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \pi \ .$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= \big(-R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\sin\vartheta\cos\varphi,\ 0 \big) \\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} &= \big(R\cos\vartheta\cos\varphi,\ R\cos\vartheta\sin\varphi,\ -R\sin\vartheta \big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = -R\sin\vartheta \cdot \big(R\sin\vartheta\cos\varphi, R\sin\vartheta\sin\varphi, R\cos\vartheta\big) = -R\sin\vartheta \cdot \big(x-a,\ y-b,\ z-c\big).$$

Vektor $(x-a,\ y-b,\ z-c)$ míří směrem od bodu (a,b,c) k bodu $(x,y,z) \in M$. Takže vektorový součin ma opačný směr, než zadaná vnější orientace sfáry M. Proto místo $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$ vezmeme v integrálu $\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$.

Pro skalární součin vektoru v integrálu tedy máme

$$(\vec{F} \circ \Phi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= R\sin\vartheta \cdot \Big((a + R\sin\vartheta\cos\varphi)^2,\ (b + R\sin\vartheta\sin\varphi)^2,\ (c + R\cos\vartheta)^2\Big) \cdot \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix} =$$

$$= R^2 \sin\vartheta \cdot \Big[2R\big(a\cos^2\varphi \sin^2\vartheta + b\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + c\cos^2\vartheta\big) + c^2\cos\vartheta + R^2\cos^3\vartheta + \cdots \Big]$$

kde tečky znamenají výrazy, ze kterých se dá vytknout buď pouze " $\sin\varphi$" nebo pouze " $\cos\varphi$" a to v liché mocnině. V integrálu pak tyto výrazy dají nulu. Takže už můžeme psát

$$\iint\limits_M \vec{F}\cdot d\vec{S} =$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le\vartheta\le\pi}} R^2 \sin\vartheta \cdot \Big[2R\big(a\cos^2\varphi \sin^2\vartheta + b\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + c\cos^2\vartheta\big) + c^2\cos\vartheta + R^2\cos^3\vartheta \Big]\ d\varphi\ d\vartheta =$$

$$= \int\limits_0^\pi R^2\sin\vartheta \cdot \Big[2R\big(\pi a\sin^2\vartheta + \pi b \sin^2\vartheta + 2\pi c\cos^2\vartheta\big) + 2\pi c^2\cos\vartheta + 2\pi R^2\cos^3\vartheta \Big]\ d\vartheta =$$

$$= 2R^3\pi(a+b)\cdot \left(\int\limits_0^\pi \sin^3\vartheta\ d\vartheta \right) + 4R^3\pi c \cdot \left(\int\limits_0^\pi \cos^2\vartheta \sin\vartheta\ d\vartheta \right) +$$

$$+ R^2\pi c^2 \cdot \left(\int\limits_0^\pi \sin(2\vartheta)\ d\vartheta \right) + 2R^4\pi \cdot \left(\int\limits_0^\pi \cos^3\vartheta\sin\vartheta\ d\vartheta \right) =$$

$$= 2R^3\pi(a+b)\cdot \left(\int\limits_0^\pi (1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\ d\vartheta \right) + 4R^3\pi c\cdot \Big[-\frac{\cos^3\vartheta}{3} \Big]_0^\pi + 2R^4\pi \cdot \Big[-\frac{\cos^4\vartheta}{4} \Big]_0^\pi =$$

$$= \quad 2R^3\pi(a+b)\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right) + 4R^3\pi c \cdot \frac{2}{3} \quad = \quad \frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c)\ .$$

14.2 Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s},$$

kde

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$ a M je řez kostky $J = \langle 0, a\rangle^3$ rovinou $x + y + z = \frac{3a}{2}$. Orientace je určena pořadím bodů $\left(\frac{a}{2}, a, 0\right)$, $\left(a, 0, \frac{a}{2}\right)$ a $\left(a, \frac{a}{2}, 0\right)$.

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, z^2, x^2)$ a M je trojúhelník $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ a $(0,0,a)$. Orientace je daná uvedeným pořadím vrcholů.

Řešení:
Stokesova věta je zobecnění Greenovy věty z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ (orientovaná plocha, jejíž je křivka nyní okrajem, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}.$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (vztyčený palec poblíž okraje ukazuje směr orientace plochy a prsty směr orientace okraje).

(i) Množina M je pravidelný šestiúhelník s hranou o délce $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Dále máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \big(-2y - 2z, -2x - 2z, -2x - 2y \big) \ .$$

Podle zadání je normálové vektorové pole orientované plochy M určené (normovaným) vektorem roviny, ve které plocha leží, a sice $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$ (směru vektoru také odpovídá zadání). K výpočtu využijeme

- definici toku pole plochou,
- toho, že plocha splňuje rovnici $x + y + z = \frac{3a}{2}$ a
- toho, že známe velikost plochy pravidelného šestiúhelníku:

$$\iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_M \big(\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\big)\ dS = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \iint_M x + y + z\ dS = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \iint_M \frac{3a}{2}\ dS =$$

$$= -2\sqrt{3}a \iint_M 1\ dS = -2\sqrt{3}a \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = -\frac{9}{2}a^3 \ .$$

(ii) Budeme postupovat podobně jako v (i). Množina M je rovnostranný trojúhelník s hranou o délce $\sqrt{2}a$ a leží v rovině $x + y + z = a$. Dále máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \big(-2z, -2x, -2y \big) \ .$$

Normálové vektorové pole orientované plochy M je opět $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$. Výpočet provedeme podobně:

$$\iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_M \big(\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\big)\ dS = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \iint_M x + y + z\ dS = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \iint_M a\ dS =$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = -a^3 \ .$$

14.3 Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (xyz, x, e^{xy}\cos z)$ a M je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $z \geq 0$ s orientací směrem vzhůru.

Řešení:

Máme

$$M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \ \& \ \ z \geq 0$$

a

$$\partial M: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad z = 0.$$

Plocha M je orientovaná směrem "nahoru" a orientace jejího okraje ∂M tedy odpovídá orientaci dané např. parametrizací $\varphi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ pro $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Máme tedy

$$\varphi'(\alpha) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$$

$$\iint\limits_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} (0, \cos\alpha, e^{\sin\alpha\cos\alpha}) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\alpha \, d\alpha = \pi.$$

14.4 Použitím Gaussovy věty spočítejte tok pole $\vec{F} = (3y^2z^3, 9x^2yz^2, -4xy^2)$ povrchem krychle $M = \langle 0,1\rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$.

Řešení:
Gaussova věta

$$\iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_M \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV$$

dává do souvislosti tok pole $\vec{F}$ přes okraj ∂M oblasti M v $\mathbb{R}^3$ s integrálem přes tuto oblast M. Funkce

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

která se integruje v M se nazývá divergence pole $\vec{F}$ a interpretuje se jako "zdroj"pole v daném bodě (při kladné hodnotě) případně "odtok"pole v daném bodě (při záporné hodnotě). Smyslem Gaussovy věty tedy je, že celková "změna pole"v objemu odpovídá příslušnému toku pole přes okraj.

Pro použití Gaussovy věty předpokládáme vnější orientaci povrchu krychle ∂M. Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 9x^2z^2$$

a

$$\iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_M \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 9x^2z^2 \, dx \, dy \, dz = \Big(\int\limits_0^1 9x^2 \, dx\Big) \cdot \Big(\int\limits_0^1 1 \, dy\Big) \cdot \Big(\int\limits_0^1 z^2 \, dz\Big) = 1.$$

14.5 Ověřte Gaussovu větu pro pole $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ a sféru $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Řešení:

Orientace okraje ∂M je v tomto případě daná vnější normálou.

V našem případě máme

$$M: \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1$$

a

$$\partial M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\ .$$

Gaussovu větu teď ověříme tak, že zjistíme, zda oba integrály dávají stejnou hodnotu.

Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

a

$$\iiint\limits_M \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV = \iiint\limits_M 3(x^2+y^2+z^2) \, dV = \left[\substack{x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \\ (r,\varphi,\vartheta) \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,\pi\rangle} \right] =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2 \cdot |r^2 \sin\vartheta| \; dr\; d\varphi\; d\vartheta = \Big(\int_0^1 3r^4\; dr\Big) \cdot \Big(\int_0^{2\pi} 1\; d\varphi\Big) \cdot \Big(\int_0^{\pi} \sin\vartheta\; d\vartheta\Big) = \frac{3}{5} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{12}{5}\pi.$$

Pro druhý integrál si zvolíme parametrizaci ∂M pomocí sférických souřadnic

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta),$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \pi\ .$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= (\,-\sin\vartheta\sin\varphi,\ \sin\vartheta\cos\varphi,\ \ 0\ ) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} &= (\ \ \cos\vartheta\cos\varphi,\ \cos\vartheta\sin\varphi,\ -\sin\vartheta\,) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = -\sin\vartheta \cdot (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) = -\sin\vartheta \cdot \vec{\Phi}(\varphi, \vartheta).$$

Vektor $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}$ tedy má směr normály směřující dovnitř. Protože plochu máme orientovanou směrem ven, musíme při výpočtu toku pole vzít tento vektor s opačným znaménkem, tj. $-\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$.

Dosazením tedy obdržíme

$$\iint_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}(\Phi(\varphi,\vartheta)) \cdot \Big(-\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\Big) dS = \iint_U \vec{F}(\Phi(\varphi,\vartheta)) \cdot \Big(\sin\vartheta \cdot \vec{\Phi}(\varphi,\vartheta)\Big)\; dS =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\vartheta \Big(\sin^4\vartheta\cos^4\varphi + \sin^4\vartheta\sin^4\varphi + \cos^4\vartheta\Big)\; d\varphi\; d\vartheta =$$

$$= \Big(\int_0^{\pi} \sin^5\vartheta\; d\vartheta\Big) \cdot \Big(\int_0^{2\pi} \cos^4\varphi + \sin^4\varphi\; d\varphi\Big) + \Big(\int_0^{\pi} \cos^4\vartheta\sin\vartheta\; d\vartheta\Big) \cdot \Big(\int_0^{2\pi} 1\; d\varphi\Big).$$

Pro první dva integrály máme díky posunutí a symetriím, že

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\varphi\; d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^4\varphi\; d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\; d\varphi$$

a

$$\int_0^{\pi} \sin^5\vartheta\; d\vartheta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\vartheta\; d\vartheta.$$

Pro $n \ge 2$ spočítáme tedy integrál

$$A_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\alpha\; d\alpha = [-\cos\alpha \cdot \sin^{n-1}\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}\alpha \cdot \cos^2\alpha\; d\alpha =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha)\; d\alpha = (n-1)A_{n-2} - (n-1)A_n.$$

Tedy máme $A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}$ a $A_2 = \frac{\pi}{4}$ a $A_0 = 1$. Dokončením výpočtu dostáváme

$$\iint_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \cdots = \Big(2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}\Big) \cdot \Big(8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4}\Big) + \Big(\Big[-\frac{\cos^5 \vartheta}{5}\Big]_0^\pi\Big) \cdot \Big(2\pi\Big) = \frac{8}{5}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{12}{5}\pi,$$

a Gaussova věta je tak ověřena.