2. cvičení z Matematiky 2

29. února - 4. března 2016

2.1 Nechť $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť $A^{\mathbf{c}} := \mathbb{R}^n \setminus A$ značí doplněk (*complement*) množiny A v $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že platí:

(1) $\left(\overline{A}\right)^{\mathbf{c}} = \left(A^{\mathbf{c}}\right)^{\circ}$, $\overline{\left(A^{\mathbf{c}}\right)} = \left(A^{\circ}\right)^{\mathbf{c}}$,

(2) A, B otevřené $\Rightarrow A \cap B$ otevřená,

(3) $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$,

(4) A, B uzavřené $\Rightarrow A \cup B$ uzavřená,

(5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Řešení:
Pojem *otevřená* množina intuitivně zavádíme jako množinu, která s každým bodem obsahuje ještě dost prostoru kolem něj (je to kvůli pozdějšímu použití pro derivování - potřebujeme se k bodu přiblížit "odkudkoliv"). Přesněji:

Otevřená množina G je taková, že s každým bodem $x_0 \in$ obsahuje i nějaké jeho okolí $U_\varepsilon(x_0)$ v podobě tzv. otevřené koule s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě x_0:

$$U_\varepsilon(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}.$$

tj.

$$G \text{ je } \textit{otevřená} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\forall x_0 \in G)\ (\exists\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x_0) \subseteq G$$

Pojmem uzavřené množiny zase intuitivně myslíme takovou množinu, ze které nemůžeme vypadnout při "limitách posloupností", tj. taková množina obsahuje všechny body, ke kterým se můžeme z této množiny přiblížit libovolně blízko. Přesněji:

Uzavřená množina F je taková, že každý bod $x_0 \in \mathbb{R}^n$, jehož libovolné okolí $U_\varepsilon(x_0)$ má s množinou F průnik, už musí ležet v F:

$$F \text{ je } \textit{uzavřená} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \big(\forall x_0 \in \mathbb{R}^n\big)\ \big((\forall\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x_0) \cap F \neq \emptyset\ \big) \Rightarrow x_0 \in F$$

Kupodivu, tyto dva pojmy jsou nakonec navzájem doplňkové v tom smyslu:

$$G \text{ je otevřená} \quad \Leftrightarrow \quad G^{\mathbf{c}} \text{ je uzavřená}$$
$$F \text{ je uzavřená} \quad \Leftrightarrow \quad F^{\mathbf{c}} \text{ je otevřená}$$

Připomeňme si ještě, že

- *vnitřek* A° množiny A definujeme jako množinu všech bodů, které jsou v A i s nějakým okolím (neboli vnitřek je největší otevřená množina obsažená v A)

$$x \in A^{\circ} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\exists\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x) \subseteq A$$

- *uzávěr* $\overline{A}$ množiny A si definujeme jako množinu všech bodů, ke kterým se můžeme přiblížit libovolně blízko z množiny A.

$$x \in \overline{A} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\forall\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$$

- *hranice* ∂A množiny A je množina všech bodů, jejich libovolná okolí zasahují jak do samotné množiny A, tak do jejího doplňku $A^{\mathbf{c}}$

$$x \in \partial A \overset{\text{def}}{\iff} (\forall\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \neq U_\varepsilon(x) \cap A^{\mathbf{c}}$$

Pro libovolnou množinu A se tak celý prostor $\mathbb{R}^n$ vždy disjunktně rozloží (značeno pomocí "$\cup\!\!\!\cdot$") na vnitřek A°, hranici ∂A a vnějšek $(A^{\mathbf{c}})^\circ$:

$$\mathbb{R}^n = A^\circ \ \dot\cup\ \partial A \ \dot\cup\ (A^{\mathbf{c}})^\circ$$

Kromě toho ještě platí:

- $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap \overline{A^{\mathbf{c}}}$
- Uzávěr $\overline{A}$ je uzavřená množina a sice nejmenší uzavřená, která obsahuje množinu A.
- A je otevřená $\Leftrightarrow A = A^\circ$
- A je uzavřená $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

(1) Snadno teď máme:

$$x \in \left(\overline{A}\right)^{\mathbf{c}} \ \Leftrightarrow\ \neg\Big[(\forall\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset\Big] \ \Leftrightarrow\ (\exists\ \varepsilon > 0)\ U_\varepsilon(x) \subseteq A^{\mathbf{c}} \ \Leftrightarrow\ x \in \left(A^{\mathbf{c}}\right)^\circ .$$

Tedy

$$\left(\overline{A}\right)^{\mathbf{c}} = (A^{\mathbf{c}})^\circ \ . \tag{E.1}$$

Druhou rovnost dostaneme buď analogicky nebo přechodem k doplňkům $A := B^{\mathbf{c}}$ a následně aplikací doplňků:

$$\overline{A} \overset{(E.1)}{=} \left((A^{\mathbf{c}})^\circ\right)^{\mathbf{c}} \quad \Rightarrow \quad \overline{(B^{\mathbf{c}})} = (B^\circ)^{\mathbf{c}} \tag{E.2}$$

Tedy můžeme prohazovat pořadí uzávěru a doplňku, když pak uzávěr změníme na vnitřek.

(2) Jestliže A a B jsou otevřené, pak s každým bodem obsahují i nějakou otevřenou kouli. Když si vezmeme tu s menším poloměrem, bude obsažena v obou množinách, tedy v průniku. Takže $A \cap B$ je také otevřená.

(3) Použijeme základní vlastnosti vnitřku:

$$A^\circ \subseteq A \tag{E.3}$$

$$(A^\circ)^\circ = A^\circ \tag{E.4}$$

$$A \subseteq B \ \Rightarrow\ A^\circ \subseteq B^\circ \tag{E.5}$$

Teď ukážeme, že $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$:

$$\Big(A\cap B \subseteq A \ \ \& \ \ A\cap B \subseteq B\Big) \overset{(E.5)}{\Longrightarrow} \Big((A\cap B)^\circ \subseteq A^\circ \ \ \& \ \ (A\cap B)^\circ \subseteq B^\circ\Big) \implies (A\cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$$

A ještě zbývá udělat $(A \cap B)^\circ \supseteq A^\circ \cap B^\circ$:

$$A^\circ \text{ a } B^\circ \text{ jsou otevřené} \overset{\mathbf{(2)}}{\Rightarrow} A^\circ \cap B^\circ \text{ je otevřená} \implies (A^\circ \cap B^\circ)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

Tedy

$$A^\circ \cap B^\circ \overset{\text{(E.3)}}{\subseteq} A \cap B \quad \overset{\text{(E.5)}}{\Longrightarrow} \quad A^\circ \cap B^\circ \overset{\text{(E.4)}}{=} (A^\circ \cap B^\circ)^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ \ .$$

Takže máme $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(4) Můžeme postupovat podobně jako v (2) a použít základní vlastnosti uzávěru:

$$A \subseteq \overline{A} \tag{E.6}$$

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A} \tag{E.7}$$

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \subseteq \overline{B} \tag{E.8}$$

nebo můžeme využít dokázanou část (2) a přejdeme k doplňkům:

A, B uzavřené $\Rightarrow$ $A^{\mathbf{c}}, B^{\mathbf{c}}$ otevřené $\Rightarrow$ $A^{\mathbf{c}} \cap B^{\mathbf{c}} = (A \cup B)^{\mathbf{c}}$ otevřená $\Rightarrow$ $A \cup B$ uzavřená.

(5) Můžeme postupovat podobně jako v (3) nebo můžeme využít dokázanou část (3) a přejdeme k doplňkům s pomocí (1):

$$\overline{A \cup B} = \left((\overline{A \cup B})^{\mathbf{c}} \right)^{\mathbf{c}} \overset{\mathbf{(1)}}{=} \left(((A \cup B)^{\mathbf{c}})^\circ \right)^{\mathbf{c}} = \left((A^{\mathbf{c}} \cap B^{\mathbf{c}})^\circ \right)^{\mathbf{c}} \overset{\mathbf{(3)}}{=}$$

$$\overset{\mathbf{(3)}}{=} \left((A^{\mathbf{c}})^\circ \cap (B^{\mathbf{c}})^\circ \right)^{\mathbf{c}} \overset{\mathbf{(1)}}{=} \left((\overline{A})^{\mathbf{c}} \cap (\overline{B})^{\mathbf{c}} \right)^{\mathbf{c}} = \left((\overline{A} \cup \overline{B})^{\mathbf{c}} \right)^{\mathbf{c}} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Jak je vidět, při základní "manipulaci"s uzávěry, vnitřky atd.. si do velké míry vystačíme s "algebraickým"popisem těchťo pojmů (viz vlastnosti (E.3) - (E.8)) a nemusíme jít až do základní definice, která využívá pojem okolí.

2.2 Určete vnitřek, hranici a uzávěr následujících množin:
(1) $M = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 \leq 3, a^2 - 4a + b^2 \leq 0\}$;
(2) $M = \mathbb{Q}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všech racionálních čísel.

Řešení:

(1) Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec můžeme první nerovnost upravit na $(a+1)^2 + b^2 \leq 4$ neboli $\|(a, b) - (-1, 0)\|^2 \leq 4$. Podobně druhá nerovnost znamená $\|(a, b) - (2, 0)\|^2 \leq 4$. Množinu M proto můžeme vyjádřit jako

$$M = A \cap B \ \text{, kde} \ A = \overline{U}_2(-1, 0) \ \text{ a } \ B = \overline{U}_2(2, 0),$$

tedy jako průnik dvou uzavřených koulí (viz dále). Pro $\varepsilon > 0$ a $x_0 \in \mathbb{R}^2$ používáme značení

$$\overline{U}_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$$

Uzávěr M: Nyní víme, že obě množiny A i B jsou uzávěry nějakých množin, tedy jsou uzavřené. Množina M je jejich průnikem, tedy je také uzavřená a proto je uzávěrem sama sebe (neboli $\overline{M} = M$).

Vnitřek M: Použijeme vztah $M^\circ = (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. Protože $A^\circ = \left(\overline{U}_2(-1, 0) \right)^\circ = U_2(-1, 0)$ (což není težké ukázat). Podobně to platí pro B a dostáváme tak

$$M^\circ = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 < 3, a^2 - 4a + b^2 < 0\}.$$

Hranice M:

$$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ =$$
$$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a^2+2a+b^2 = 3 \;\&\; a^2-4a+b^2 \leq 0) \vee (a^2+2a+b^2 \leq 3 \;\&\; a^2-4a+b^2 = 0)\}.$$

Důležitá poznámka: Nechť $f : D \to \mathbb{R}$ (kde $D \subseteq \mathbb{R}^n$) je spojitá funkce. Pak množina

$$f^{-1}(-\infty, 0) = \{a \in D \mid f(a) < 0\}$$

(tj. vzor otevřeného intervalu $(-\infty,0) \subseteq \mathbb{R}$) je otevřená množina v rámci množiny D, neboli $f^{-1}(-\infty,0) = D \cap U$ pro nějakou otevřenou množinu U. Podobně

$$f^{-1}(-\infty, 0\rangle = \{a \in D \mid f(a) \leq 0\}$$

(tj. vzor uzavřeného intervalu $(-\infty,0) \subseteq \mathbb{R}$ je uzavřená množina v rámci množiny D, neboli $f^{-1}(-\infty,0\rangle = D \cap F$ pro nějakou uzavřenou množinu F.

Protože funkce $f(a,b) = a^2+2a+b^2-3$ a $g(a,b) = a^2-4a+b^2$ jsou spojité na celém $\mathbb{R}^2$, je množina

$$M = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+2a+b^2 \leq 3, a^2-4a+b^2 \leq 0\}$$

uzavřená (neboli $\overline{M} = M$) a množina

$$N = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+2a+b^2 < 3, a^2-4a+b^2 < 0\}$$

je otevřená (neboli $N^\circ = N$).

POZOR! Tímhle způsobem ale obecně nemusíme získat přímo vnitřek M°, ale jen nějakou jeho podmnožinu $N \subseteq M^\circ$. Rovnost nemusí obecně nastat např. pro $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 \leq 0\}$ je

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 < 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subsetneq \mathbb{R} = A^\circ.$$

Pro rovnost je potřeba použít větu o implicitní funkci. Z té pak plyne toto tvrzení:

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina $f : U \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce na U. Položme

$$A = \{x \in U \mid f(x) \leq 0\}.$$

Pokud pro každé $x_0 \in A$ takové, že $f(x_0) = 0$, je $f'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{|x_0} \neq 0$, pak

$$A^\circ = \{x \in U \mid f(x) < 0\}.$$

V našem případě opravdu pro $f(a,b) = a^2+2a+b^2-3$ máme $f'(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}\right) = \left(2a+2, 2b\right)$. Pokud by náhodou nastalo, že $f'(a,b) = 0$, pak je $a = -1$ a $b = 0$ a tudíž $f(-1,0) = -4 \neq 0$. Podmínku z předchozí věty tak máme splněnou a proto opravdu $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+2a+b^2 < 3\}$ je vnitřek množiny $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+2a+b^2 \leq 3\}$.

(2) Uvědomíme si, že v libovolném okolí libovolného $r \in \mathbb{R}$ leží jak nějaké racionální číslo, tak také nějaké iracionální číslo. Dále pokud máme $|r_i - s_i| < \varepsilon$ pro $i = 1,2,3$ (kde $r_i, s_i \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$) pak $\|(r_1,r_2,r_3) - (s_1,s_2,s_3)\| \leq \sqrt{3} \cdot \varepsilon$. Speciálně tedy v libovolném okolí bodu $x \in \mathbb{R}^3$ leží jak nějaký prvek z $\mathbb{Q}^3$, tak nějaký prvek z $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$. Proto můžeme ihned napsat, že

$$\overline{\mathbb{Q}^3} = \mathbb{R}^3, \quad (\mathbb{Q}^3)^\circ = \emptyset \;\text{ a }\; \partial\mathbb{Q}^3 = \overline{\mathbb{Q}^3} \setminus (\mathbb{Q}^3)^\circ = \mathbb{R}^3.$$

2.3 Sestrojte příklady neprázdných množin M v $\mathbb{R}^2$, že

(1) nemá žádný vnitřní bod,

(2) nemá žádný hraniční bod,

(3) nemá žádný vnější bod,

(4) nemá žádný hromadný bod,

(5) nemá žádný izolovaný bod.

Řešení:

(1) jakákoliv spočetná množina (např. $\mathbb{Q}^2$), kružnice, přímka, ...

(2) Z požadavku $\partial M = \emptyset$ plyne, že $M^\circ \subseteq M \subseteq \overline{M} = \partial M \cup M^\circ = M^\circ$, tedy $M^\circ = M = \overline{M}$ a množina M je tak současně otevřená a uzavřená. Jediná taková neprázdná množina je pouze $M = \mathbb{R}^2$. (Pro podrobnosti viz příklad **3.1** v dalším cvičení.)

(3) Vnějšek množiny je roven $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{M}$, tedy potřebujeme, aby $\overline{M} = \mathbb{R}^2$ (množina je tzv. *hustá*). Můžeme opět volit např. $M = \mathbb{Q}^2$.

(4) jakákoliv konečná množina; $\mathbb{N}^2$, ...

(5) jakákoliv otevřená množina, ...

2.4 Najděte příklady, kdy uvedená tvrzení neplatí "pro zbylé možnosti", z příkladu **2.1** tj.

(1) A_n , $n \in \mathbb{N}$ *jsou* otevřené, ale $\bigcap_n A_n$ už *není* otevřená,

(2) $(A \cup B)^\circ \supsetneq A^\circ \cup B^\circ$,

(3) A_n , $n \in \mathbb{N}$ *jsou* uzavřené, ale $\bigcup_n A_n$ už *není* uzavřená,

(4) $\overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Řešení:

(1) $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\bigcap_n A_n = \{0\}$.

(3) $A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}\rangle \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\bigcup_n A_n = (-\infty, 0)$.

(2), (4) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x\}$. Pak je

$$(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}^2 \supsetneq \mathbb{R}^2 \setminus \text{osa } y = A^\circ \cup B^\circ$$

a

$$\overline{A \cap B} = \emptyset \subsetneq \text{osa } y = \overline{A} \cap \overline{B}.$$