Zápočtový test z MA2, varianta A, **11. 5. 2016**

1. Předpokládejme, že výška terénu v $\mathbb{R}^3$ je popsána grafem funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1}{x^2+2y^2+1}$. V bodě A daném $x = 2$ a $y = 1$ upustíme míč. Určete směr (při pohledu shora, tj. v $\mathbb{R}^2$), kterým se bude kutálet.

Dále určete, zda je strmější tečná rovina v bodě A nebo v bodě B daném $x = 0$ a $y = 1$ (tj. porovnejte úhly, které tyto roviny svírají se základnou $z = 0$).

Řešení:
Míč se bude kutálet ve směru největšího spádu funkce, tj. proti směru gradientu

$$\operatorname{grad}(f)_{|A} = \left(-\frac{2x}{(x^2 + 2y^2 + 1)^2}, -\frac{4y}{(x^2 + 2y^2 + 1)^2}\right)_{|A} = \left(-\frac{4}{7^2}, -\frac{4}{7^2}\right)$$

tedy ve směru určeném např. vektorem $\vec{v} = (1, 1)$ (směr je určen vektorem až na kladný násobek).

Normálový vektor tečné roviny grafu funkce ve zvoleném bodě je $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$. Jde tedy o normálové vektory

$$\vec{n}_A = \left(-\frac{4}{7^2}, -\frac{4}{7^2}, -1\right)$$

a

$$\vec{n}_B = \left(0, -\frac{4}{3^2}, -1\right)$$

s normami $\|\vec{n}_A\| = \sqrt{\frac{2^5}{7^4} + 1}$ a $\|\vec{n}_B\| = \sqrt{\frac{2^4}{3^4} + 1}$. Normálový vektor roviny $z = 0$ je $\vec{e} = (0, 0, 1)$. Úhly jednotlivých rovin jsou dány jako

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_A \cdot \vec{e}|}{||\vec{n}_A|| \cdot ||\vec{e}||} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2^5}{7^4} + 1}}$$

a

$$\cos(\beta) = \frac{|\vec{n}_B \cdot \vec{e}|}{||\vec{n}_B|| \cdot ||\vec{e}||} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2^4}{3^4} + 1}}$$

Porovnáním dostaneme

$$\cos(\alpha) \overset{?}{>} \cos(\beta) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\sqrt{\frac{2^5}{7^4} + 1}} \overset{?}{>} \frac{1}{\sqrt{\frac{2^4}{3^4} + 1}} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\frac{2^4}{3^4} + 1} \overset{?}{>} \sqrt{\frac{2^5}{7^4} + 1} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{2^4}{3^4} \overset{?}{>} \frac{2^5}{7^4} \;\Leftrightarrow\; 7 \cdot 7^3 \overset{?}{>} (2 \cdot 3) \cdot 3^3\ .$$

Poslední vztah platí, proto $\cos(\alpha) > \cos(\beta)$ a tedy $\alpha < \beta$ a v bodě B je rovina strmější.

2. Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ za podmínky $x^2 + y^2 = 4y - 2x$. Načtrněte útvar určený touto vazbou.

Řešení:
Útvar je kružnice $(x+1)^2+(y-2)^2 = 5$. Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x, y)$ na kružnici existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(-4, -3) = f'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda \cdot \Big(2(x + 1), 2(y - 2)\Big)$$

a

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

Vyjádříme $x+1 = -\frac{2}{\lambda}$ a $y-2 = -\frac{3}{2\lambda}$ a dosadíme do zbývající rovnice. Dostaneme $\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ a kandidáty na extrémy:

$$\Big(-\frac{4\sqrt{5}}{5} - 1, -\frac{3\sqrt{5}}{5} + 2\Big), \qquad \Big(\frac{4\sqrt{5}}{5} - 1, \frac{3\sqrt{5}}{5} + 2\Big)$$

s odpovídajícími hodnotami po řadě

$$5\sqrt{5} + 4, \qquad -5\sqrt{5} + 4.$$

Kružnice je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak v těchto bodech nabývá po řadě svého maxima a minima.

3. Vhodným způsobem integrace spočítejte integrál

$$\iint_E e^{y^3} \sqrt{xy - y^2}\, dS,$$

kde oblast E je omezená přímkami $y = x$, $x = 10y$ a $y = 1$. Tuto oblast načrtněte.

Řešení:
Oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(10,1)$ a pro výraz pod odmocninou tak máme $xy - y^2 = y(x-y) \geq 0$. Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$E: \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \& \quad y \leq x \leq 10y$$

$$\iint_E e^{y^3} \sqrt{xy - y^2}\, dS = \int_0^1 \int_y^{10y} e^{y^3} \sqrt{xy - y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \Big[e^{y^3} \frac{2}{3} \cdot \frac{(xy - y^2)^{3/2}}{y}\Big]_{x=y}^{x=10y} dy =$$

$$= \int_0^1 e^{y^3} \frac{2}{3} \cdot \frac{(9y^2)^{3/2}}{y}\, dy = 6 \int_0^1 3y^2 e^{y^3}\, dy = 6\Big[e^{y^3}\Big]_{y=0}^{y=1} = 6(e-1)\ .$$