Zápočtový test z MA2, varianta B **11. 5. 2016**

1. Vyšetřete existenci limity

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2y-1}{xy-1} \ .$$

Řešení:
Výraz v limitě má definiční obor

$$D : xy \neq 1 \ ,$$

což jsou dvě větve hyperboly. Zkusíme přiblížení ve směru souřadných os. Přiblížením po přímce $x = 1$ dostáváme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x=1}} \frac{x^2y-1}{xy-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y-1} = 1 \ .$$

Na druhou stranu přiblížením po přímce $y = 1$ dostáváme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ y=1}} \frac{x^2y-1}{xy-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2 \ .$$

Původní limita tedy neexistuje.

2. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 6xy - x^3 - 2y^3 + 2$.

Řešení:
Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'_{|(x,y)} = (6y - 3x^2, 6x - 6y^2)$$

Tedy $f'_{|(x,y)} = 0$ právě když $2y = x^2$ a $x = y^2$. Tedy $2y = y^4$ a řešení jsou tak $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''_{|(x,y)} = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -12y \end{pmatrix}$$

Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''_{|(0,0)}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = 12 \cdot h_1 h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

Pro $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ je

$$f''_{|(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})} = \begin{pmatrix} -6\sqrt[3]{4} & 6 \\ 6 & -12\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -6\sqrt[3]{4} < 0$, $\Delta_2 = 72\sqrt[3]{8} - 36 = 72 \cdot 2 - 36 > 0$) je forma daná druhou derivaci negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MAXIMUM.

Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená - např. stačí vzít zúžení $f(x,0) = -x^3 + 2$.

3. K výpočtu integrálu

$$\iint\limits_E x\cos(x^2+y)\ dS$$

kde $E: -\sqrt{\pi} \le x \le 0,\ 0 \le y \le \pi$, zvolte vhodný způsob integrace.

Řešení:
Oblast E je obdélník. Můžeme použít integraci jak podle x tak podle y:

$$\iint\limits_E x\cos(x^2+y)\ dS = \int_0^\pi \int_{-\sqrt{\pi}}^0 x\cos(x^2+y)\ dx\ dy = \int_0^\pi \left[\frac{\sin(x^2+y)}{2}\right]_{x=-\sqrt{\pi}}^{x=0} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(y) - \sin(y+\pi)\ dy = \int_0^\pi \sin(y)\ dy = \Big[-\cos(y)\Big]_{y=0}^{y=\pi} = 2$$

nebo

$$\iint\limits_E x\cos(x^2+y)\ dS = \int_{-\sqrt{\pi}}^0 \int_0^\pi x\cos(x^2+y)\ dy\ dx = \int_{-\sqrt{\pi}}^0 \Big[x\sin(x^2+y)\Big]_{y=0}^{y=\pi} dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{\pi}}^0 x\sin(x^2+\pi) - x\sin(x^2)\ dx = \int_{-\sqrt{\pi}}^0 -2x\sin(x^2)\ dx = \Big[\cos(x^2)\Big]_{x=-\sqrt{\pi}}^{x=0} = 2\ .$$