Zápočtový test z MA2, varianta C, **12. 5. 2016**

1. Určete gradienty funkcí $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ a $g(x,y)=e^{\sin(xy)}$ v bodě $(-1,0)$. Určete úhel, který v bodě $(-1,0,1)$ svírají grafy těchto funkcí.

Řešení:
Gradienty jsou

$$\text{grad } f_{|(-1,0)}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\right)_{|(-1,0)}=(-1,0)$$

$$\text{grad } g_{|(-1,0)}=\left(y\cos(xy)e^{\sin(xy)},x\cos(xy)e^{\sin(xy)}\right)_{|(-1,0)}=(0,-1)$$

Úhel, který svírají grafy funkcí je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory, tj. gradienty funkcí

$$F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}-z$$

a

$$G(x,y,z)=e^{\sin(xy)}-z.$$

Normálové vektory tečných rovin jsou nyní

$$\vec{n}_1=\text{grad } F_{|(1,0,0)}=(-1,0,-1)$$

$$\vec{n}_2=\text{grad } G_{|(1,0,0)}=(0,-1,-1)$$

Úhel $\alpha\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$ je nyní dán jako

$$\cos\alpha=\frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{||\vec{n}_1||\cdot||\vec{n}_2||}=\frac{1}{2},$$

tedy $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

2. Najděte Taylorův polynom řádu 2 funkce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=e^{xy}-2xy$$

v bodě $a=(0,0)$ a podle tohoto polynomu rozhodněte, zda má funkce v tomto bodě minimum, maximum nebo sedlový bod.

Řešení:
Funkce je symetrická vzhledem k záměně proměnných, což usnadňuje výpočet.

$$f'_{|(0,0)}=\left(ye^{xy}-2y,xe^{xy}-2x\right)_{|(0,0)}=(0,0)$$

$$f''_{(0,0)}=\begin{pmatrix} y^2e^{xy} & e^{xy}+xye^{xy}-2 \\ e^{xy}+xye^{xy}-2 & x^2e^{xy}\end{pmatrix}_{|(0,0)}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Pro $\mathbf{h}=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ máme

$$T_2(\mathbf{h})=f(0,0)+f'_{|(0,0)}\mathbf{h}+\frac{1}{2!}f''_{|(0,0)}(\mathbf{h},\mathbf{h})=1+\frac{1}{2}(h_1,h_2)\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=1-h_1h_2.$$

Kvadratická forma

$$Q(\mathbf{h}) := f''_{|(0,0)}(\mathbf{h},\mathbf{h}) = -2h_1h_2$$

druhé derivace je indefinitní (např. $Q(1,1) = -1 > 0$ a $Q(-1,1) = 1 < 0$). V bodě $a = (0,0)$ je tedy SEDLO.

3. Vhodným způsobem integrace spočítejte integrál

$$\iint\limits_E x^2 \cdot |y| \; dS,$$

kde oblast je $E : x^2 + y^2 \leq 2$. Tuto oblast načrtněte.

Řešení:
Oblast je kruh o poloměru $\sqrt{2}$. K výpočtu použijeme sférické souřadnice:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$0 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\iint\limits_E x^2 \cdot |y| \; dS = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi} r^2\cos^2\varphi \cdot |r\sin\varphi| \cdot r \; d\varphi \; dr = \Big(\int\limits_0^{\sqrt{2}} r^4 \; dr\Big) \cdot \Big(\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi |\sin\varphi| \; d\varphi\Big) =$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^5}{5} \cdot \Big(2\int\limits_0^{\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi \; d\varphi\Big) = \frac{8\sqrt{2}}{5} \cdot \Big[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{16\sqrt{2}}{15}\,.$$