3. cvičení z Matematiky 2

7.-11. března 2016

2.1 Jaké jsou obojetné, tj. současně otevřené a uzavřené množiny v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$?

Řešení:
Jediné takové dvě množiny jsou $\emptyset$ a $\mathbb{R}^n$.

Abychom si to ověřili, použijeme následující pojem souvislé množiny, který intuitivně odpovídá tomu, že množinu nemůžeme "rozkouskovat" na oddělené bloky a tedy to, co se děje v jedné její části, ovlivňuje i celý zbytek této množiny (tento pojem se uplatní hlavně při spojitém rozšiřování funkci, existenci potenciálu atd.)

Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *souvislá* právě když nejde rozdělit pomocí dvou otevřených disjunktních neprázdných množin, tj.

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ je } \textit{souvislá} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \neg\Big[(\exists\, U_1, U_2 \text{ otevřené a neprázdné}) \quad A \subseteq U_1 \cup U_2 \quad \& \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset\Big]$$

Pokud by nyní existovala nějaká obojetná množina $U \neq \emptyset$ v $\mathbb{R}^n$, taková, že také $U \neq R^n$, znamenalo by to, že $\mathbb{R}^n$ se dá rozdělit pomocí dvou disjunktních neprázdných otevřených množin U a $U^{\mathbf{c}}$. Tedy $\mathbb{R}^n$ by pak nebyla souvislá množina.

Dokázat, že $\mathbb{R}^n$ je skutečně souvislá, dá trochu práci, ale zkusíme se podívat, jak by se to pro $n \geq 2$ dalo udělat, pokud bychom už věděli, že $\mathbb{R}$ je souvislá množina.

Budeme postupovat sporem.

- Předpokládejme, že $\mathbb{R}^n$ není souvislá pro $n \geq 2$. Dá se tedy zapsat jako $\mathbb{R}^n = U \cup V$, kde U a V jsou neprázdné disjunktní otevřené množiny.
- Zvolme si bod $a \in U$ a $b \in V$ a nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je obvyklá parametrizace přímky, která spojuje body a a b (tj. $\varphi(t) = a + t(b - a)$ pro $t \in \mathbb{R}$).
- Zobrazení φ je tedy spojité a proto vzor $\varphi^{-1}(U)$ otevřené množiny U je opět otevřená množina (a neprázdná, protože $0 \in \varphi^{-1}(U)$).

  Podobně i $\varphi^{-1}(V)$ je otevřená a neprázdná množina (protože $1 \in \varphi^{-1}(V)$), která je navíc disjunktní s $\varphi^{-1}(U)$.
- A navíc určitě platí, že $\mathbb{R} = \varphi^{-1}(U) \cup \varphi^{-1}(V)$. To ale znamená, že $\mathbb{R}$ není souvislá, což je spor!

$\mathbb{R}^n$ tak musí být souvislá a proto nemá žádné další (neprázdné) obojetné množiny.

2.2 Rozhodněte, zda množina je souvislá:

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leq ||(x, y)|| < 5\}$,

(ii) $\mathbb{Q}^2$,

(iii) $\mathbb{R}^2\setminus$ "bod", $\mathbb{R}^2\setminus$ "přímka",

(iv) $\mathbb{R}^3\setminus$ "bod", $\mathbb{R}^3\setminus$ "přímka", $\mathbb{R}^3\setminus$ "rovina".

Řešení:
(i) Dokazovat souvislost jako takovou je trochu obtížnější. Pomůžeme si proto o něco silnějším pojmem:

Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *obloukově souvislá*, pokud každé dva body $a, b \in M$ existuje spojitá křivka $\varphi : \langle 0, 1\rangle \to M$, že $\varphi(0) = a$ a $\varphi(1) = b$.

Veta: Každá obloukově souvislá množina je souvislá.

Pozor! Existují ale množiny, která jsou sice souvislé, ale nejsou obloukově souvislé, např.

$$A = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in (0, \infty) \right\} \cup \{0\} \times \langle -1, 1\rangle$$

kde body na ose y nejdou propojit s grafem funkce $\sin\frac{1}{x}$.
Pro otevřené množiny ale oba pojmy splývají:

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Pak je obloukově souvislá právě když je souvislá. (Otevřená souvislá množina se nazývá *oblast*.)

Množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leq ||(x, y)|| < 5\}$ je souvislá, protože se jedná o mezikruží, které je obloukově souvislé (body lze spojit např. soustřednými kružnicemi a ty pak propojit úsečkou směřující do počátku).

(ii) Množina není souvislá, protože ji lze rozložit pomocí dvou neprázdných disjunktních otevřených množin A a B, např. $A = \{(x, y \in \mathbb{R}^2) \mid x < \sqrt{2}\}$ a $B = \{(x, y \in \mathbb{R}^2) \mid x > \sqrt{2}\}$.

(iii), (iv) souvislé jsou tyto množiny: $\mathbb{R}^2\setminus$ "bod", $\mathbb{R}^3\setminus$ "bod", $\mathbb{R}^3\setminus$ "přímka"(protože jsou zjevně obloukově souvislé),
a nesouvislé tyto: $\mathbb{R}^2\setminus$ "přímka", $\mathbb{R}^3\setminus$ "rovina"(protože se zjevně dají napsat pomocí dvou otevřených poloprostorů).

2.3 Najděte limity

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^2}$

(iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$

Řešení:
(i) Pro funkci $f(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Bod $(0, 0)$ je hromadným bodem množiny D_f (tedy má smysl ptát se na limitu f v tomto bodě). Limitu určíme podle věty o limitě složené funkce $f(x, y) = h(g(x, y))$, kde $g(x, y) = x + y$ a $h(z) = \frac{\sin(z)}{z}$.
Pro korektní použití věty o limitě složené funkce ale ještě potřebujeme zajistit, aby

- buď v okolí bodu $(0, 0)$ bylo $g(x, y) \neq 0$

- nebo aby funkce h byla spojitá v $z = 0$.

První případ si můžeme zajistit tak, že omezíme definiční obor funkce g, tj. vezmeme $D_g := D_f$ a druhý tak, že funkci h spojitě dodefinujeme v $z = 0$. Nyní tedy máme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x + y = 0 \quad \text{(protože } g \text{ je součet spojitých funkcí)},$$

$$\lim_{z\to 0} h(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$$

takže

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(g(x,y)) = 1.$$

(ii) Pro funkci $f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm y\}.$$

Zúžením f na osu x (tj. $y = 0$) dostáváme

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Na druhou stranu zúžením f na osu y (tj. $x = 0$) dostáváme

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{-y^2} = -1.$$

Původní limita tedy NEEXISTUJE.

(iii) Pro funkci $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+2y^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Zúžením f na osu x (tj. $y = 0$) dostáváme

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0.$$

Na druhou stranu zúžením f na přímku $x = y$ dostáváme

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{y\to 0} \frac{2x^2}{x^2+2x^2} = \frac{2}{3}.$$

Původní limita tedy NEEXISTUJE.

(iv) Pro funkci $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Stačí tedy zjistit $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)$. Použijeme odhad

$$0 \le \left|x^2y^2\ln(x^2+y^2)\right| \le (x^4+2x^2y^2+y^4)\cdot\left|\ln(x^2+y^2)\right| = (x^2+y^2)^2\cdot\left|\ln(x^2+y^2)\right|.$$

Použitím věty o limitě složené funkce pro

$$g(x,y) = x^2+y^2 \quad \text{a} \quad h(z) = z^2\ln z$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{z\to 0_+} h(z) = 0 \quad \text{(např. L'Hospitalovo pravidlo)}$$

dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^2 \ln(x^2+y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(g(x,y)) = 0.$$

Z věty o sevření pak máme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2 \ln(x^2+y^2) = 0$$

tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^0 = 1.$$