4. cvičení z Matematiky 2

14.-18. března 2016

4.1 Najděte limity

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}$

(ii) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \frac{xz^2-y^2z}{xyz-1}$

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

(iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$

Řešení:

(i) Pro funkci $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$$

a bod $(0,1)$ je tedy hromadným bodem D_f. Pro limitu použijeme obvyklý trik, jak se zbavit odmocniny (tj. vzorec $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$)

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}+1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}+1} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+(y-1)^2}{\left(x^2+(y-1)^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}+1\right)} = \frac{1}{2} \ .$$

(ii) Pro funkci $f(x,y,z) = \frac{xz^2-y^2z}{xyz-1}$ je její definiční obor

$$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 1\}$$

a bod $(1,1,1)$ je tedy hromadným bodem D_f. Stupně polynomů v čitateli i jmenovateli jsou stejné, takže spíš zkusíme, jestli limita vůbec existuje.

Zúžením f na přímku $x = y = z$ (bez bodu $(x,y,z) = (1,1,1)$) dostáváme $f(x,x,x) = \frac{x^3-x^3}{x^3-1} = 0$, takže

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(1,1,1)\\ x=y=z}} f(x,y,z) = \lim_{x\to1} f(x,x,x) = 0 \ .$$

Na druhou stranu zúžením f na přímku $x = y = 1$ (opět bez bodu $(x,y,z) = (1,1,1)$) dostáváme $f(1,1,z) = \frac{z^2-z}{z-1} = z$, takže

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(1,1,1)\\ x=y=1}} f(x,y,z) = \lim_{z\to1} f(1,1,z) = \lim_{z\to1} z = 1 \ .$$

Původní limita tedy NEEXISTUJE.

(iii) Pro funkci $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

a má hromadný bod $(0,0)$. Polynom v čitateli ma vyšší stupeň než ve jmenovateli, takže spíš zkusíme ukázat, že limita existuje a bude nulová (což si můžeme otestovat zúžením f např. na souřadné osy).

Použijeme opět odhady a pak větu o limitě sevřené funkce. Zřejmě platí

$$|x| \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|,$$

což je důležitá nerovnost, která se hodí na dokazování limit. Podobně $|y| \le \|(x,y)\|$, takže máme

$$0 \le \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \le \frac{\|(x,y)\|^2 \cdot \|(x,y)\|^2}{x^2+y^2} = \|(x,y)\|^2.$$

Z definice limity snadno dostáváme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\|^2 = 0$ (podobná tvrzení už můžeme brát skoro jako "fakt") a tedy z věty o limitě sevřené funkce je rovněž

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0\ .$$

(iv) Na rozdíl od předchozího případu zde bude situace podstatně jiná a to kvůli nulovým hodnotám jmenovatele. Pro funkci $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$ je její definiční obor

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -\sqrt[3]{x^2}\}$$

a zřejmě má hromadný bod $(0,0)$.

Zúžením f na přímku $x = 0$ (bez bodu $(x,y) = (0,0)$) dostáváme $f(0,y) = 0$, takže

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0\ .$$

Pokud by tedy limita existovala, musí být rovna 0. Polynom v čitateli je nulový na osách $x = 0$ a $y = 0$, zatímco polynom ve jmenovateli je nulový na křivce $y = -\sqrt[3]{x^2}$. V bodech $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ takových, že $y_0 = -\sqrt[3]{x_0^2}$ a $x_0 \neq 0$ tedy máme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ 0\neq y_0=-\sqrt[3]{x_0^2}}} \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^3}\right| = \frac{x_0^2y_0^2}{+\infty} = +\infty$$

(pokud na chvíli připustíme, že $+\infty$ může také být limitou, kterou jinak smí podle naší definice být pouze prvek z $\mathbb{R}$.)

Pokud by funkce f měla v $(0,0)$ limitu 0, musela by speciálně být na nějakém okolí $(0,0)$ omezená, tj. existují $K > 0$ a $\varepsilon > 0$, že $\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^3}\right| \le K$ pro všechna $(x,y) \in U_\varepsilon(0,0) \cap D_f$.

V okolí $U_\varepsilon(0,0)$ se ale také nacházejí body $(x_0, -\sqrt[3]{x_0^2})$, ve kterých je v limitě funkce f naopak neomezená.

To je spor a původní limita tedy NEEXISTUJE.

4.2 Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x,y) = xy + \sin(x+y)$ v bodě $(1,-1,?)$.

Řešení:
Graf funkce f je množina $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y) \;\&\; (x,y) \in D_f\}$. Tečná rovina $T_{(x_0,y_0,z_0)}$, ke grafu f v bodě $(x_0,y_0,z_0) = (1,-1,-1)$, kde $z_0 = f(x_0,y_0) = -1$ je dána rovnicí

$$z = f(x_0,y_0) + \mathrm{grad} f_{|(x_0,y_0)} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Máme

$$\mathrm{grad} f_{|(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\big|(x_0,y_0)} = \Big(y + \cos(x+y), x + \cos(x+y)\Big)_{\big|(1,-1)} = (2,0),$$

tedy tečná rovina má rovnici

$$z = -1 + (2,0) \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = -1 + 2(x-1)$$

neboli

$$2x - z = 3.$$

4.3 Určete derivaci funkce

(i) $f(x,y,z) = z^3 - x^2 y$ v bodě $a = (1,6,2)$ podle vektoru $\vec{v} = (3,4,12)$,

(ii) $f(x,y) = e^x \cos y + 2y$ v bodě $a = (0,0)$ podle vektoru $\vec{v} = (-1,2)$.

Řešení:
Derivace funkce f v bodě a podle vektoru $\vec{v}$ je definovaná jako

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}_{|a} := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot \vec{v}) - f(a)}{t}\ .$$

Pokud ovšem existuje derivace f'_a funkce f v bodě a (tj. totální diferenciál), pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}_{|a} = f'_{|a}(\vec{v}) = \mathrm{grad} f_{|a} \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x_1}_{|a} \cdot v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}_{|a} \cdot v_n$$

kde $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.

(i) Pro $f(x,y,z) = z^3 - x^2 y$ a $a = (1,6,2)$ máme

$$\mathrm{grad} f_{|a} = (2xy, x^2, 3z^2)_{|a} = (12,1,12)$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}_{|a} = (12,1,12) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = 184\ .$$

Pokud bychom brali derivaci podle SMÉRU $\vec{v}$, pak je potřeba vektor ještě znormovat, tj. použijeme vektor $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ a pak je $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}_{|a} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}_{|a} = \frac{184}{13}$.

(ii) Pro $f(x,y) = e^x \cos y + 2y$ a $a = (0,0)$ máme

$$\mathrm{grad} f_{|a} = (e^x \cos y, -e^x \sin y + 2)_{|a} = (1,2)$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}_{|a} = (1,2)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\ .$$

4.4 Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$, která

(i) je rovnoběžná s rovinou $4x+2y+z=3$,

(ii) vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách.

Řešení:

Když je nějaká množina M zadaná jako vrstevnice nějaké spojitě diferencovatelné funkce (tj. rovností $f(x,y,z)=0$), pak tečná rovina k M je kolmá ke gradientu funkce f (pokud je tento gradient nenulový), tj. gradient je její normálový vektor.

V našem případě si vezmeme $f(x,y,z)=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}-1$. Takže normálový vektor tečné roviny je

$$f'_{|a_0} = \mathrm{grad}(f)_{|a_0} = \left(\frac{2x}{25},\frac{y}{8},\frac{2z}{9}\right)$$

(i) Tečná rovina má být rovnoběžná s rovinou $\rho : 4x+2y+z=3$, která má normálový vektor $\mathbf{n}_\rho=(4,2,1)$. To nastane právě když

$$\left(\frac{2x}{25},\frac{y}{8},\frac{2z}{9}\right) = \mathrm{grad}(f)_{|a_0} = \lambda\cdot\mathbf{n}_\rho = \lambda\cdot(4,2,1)$$

pro nějaké $\lambda\in\mathbb{R}$. Tedy $x=50\lambda$, $y=16\lambda$ a $z=\frac{9}{2}\lambda$.

Současně má také platit, že

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1\ .$$

Po dosazení pak dostaneme $100\lambda^2+16\lambda^2+\frac{9}{4}\lambda^2=1$ tedy $\lambda=\pm 2/\sqrt{473}$.

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor $\mathbf{n}_\rho$, tedy rovnici $4x+2y+z=c$, kde neznámé hodnoty $c\in\mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $(x_0,y_0,z_0)=\pm\frac{1}{\sqrt{473}}\cdot(100,32,9)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x+2y+z=\sqrt{473}$$

a

$$4x+2y+z=-\sqrt{473}.$$

(ii) Postupujeme podobně. Rovina, vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách, má normálový vektor $\mathbf{n}=(1,1,1)$. Tedy

$$\left(\frac{2x}{25},\frac{2y}{16},\frac{2z}{9}\right) = \mathrm{grad}(f)_{|u_0} = \lambda\cdot\mathbf{n} = \lambda\cdot(1,1,1)$$

pro nějaké $\lambda\in\mathbb{R}$. Dostáváme $\lambda=\pm 2/\sqrt{25}$ a tečné roviny jsou

$$x+y+z=5\sqrt{2}$$

a

$$x+y+z=-5\sqrt{2}.$$

4.5 Najděte úhel sevřený dvěma plochami

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8 \quad \text{a} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$$

v bodě $a_0 = (2, 0, 2)$.

Řešení:
Úhel sevřený dvěma rovinami je roven úhlu, který svírají přímky určené normálovými vektory těchto rovin. Podle předchozího je tedy

$$\mathbf{n}_1 = (2x, 2y, 2z)_{|a_0} = (4, 0, 4)$$

a

$$\mathbf{n}_2 = \Big(2(x-1), 2(y-2), 2(z-3)\Big)_{|a_0} = (2, -4, -2).$$

Pro hledaný úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ pak je

$$\cos\alpha = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{||\mathbf{n}_1|| \cdot ||\mathbf{n}_2||} = 0$$

takže $\alpha = \frac{\pi}{2}$.