5. cvičení z Matematiky 2

21.-25. března 2016

5.1 Nalezněte úhel, který v bodě $(1,0,0)$ svírají grafy funkcí

$$f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) \quad \text{a} \quad g(x,y) = \sin(xy).$$

Řešení:
Úhel, který svírají grafy funkcí je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory, tj. gradienty. Grafy si zadáme implicitně:

pro f to bude $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0 \ \& \ (x,y) \neq (0,0)\}$, kde

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - z$$

a pro g to bude $\Gamma_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x,y,z) = 0\}$, kde

$$G(x,y,z) = \sin(xy) - z.$$

Normálové vektory tečných rovin jsou nyní

$$\vec{n}_1 = \operatorname{grad} F_{|(1,0,0)} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, -1\right)_{|(1,0,0)} = (1,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \operatorname{grad} G_{|(1,0,0)} = \Big(y\cos(xy), x\cos(xy), -1\Big)_{|(1,0,0)} = (0,1,-1)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je nyní dán jako

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{1}{2},$$

tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

5.2 Vyšetřete existenci derivace (totálního diferenciálu) v bodě $(0,0)$ u funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Řešení:
Podle definice je derivace f v bodě $a_0 = (0,0)$ takové lineární zobrazení $f'_{|a_0} = L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, že

$$\lim_{a \to a_0} \frac{f(a) - f(a_0) - L(a-a_0)}{\|a-a_0\|} = 0 \ .$$

Pokud derivace existuje, pak je jednoznačně určena parciálními derivacemi v daném bodě:

$$\frac{\partial f}{\partial x}_{|(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}_{|(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

Pro $a = (x,y)$ tak je

$$L(a-a_0) = (1,0)\cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = x\ .$$

Takže

$$\lim_{a\to a_0} \frac{f(a)-f(a_0)-L(a-a_0)}{\|a-a_0\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2}-0-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Pokud si teď vezmeme zúžení výsledného výrazu např. pro $x=y$ dostaneme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3}{(2x^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{\sqrt{8}\cdot|x|}\ .$$

Tato limita ale neexistuje a tím spíš původní limita neexistuje (a už vůbec není nulová, jak bychom potřebovali). Derivace (totální diferenciál) v bodě $(0,0)$ tedy neexistuje.

5.3 Najděte derivaci funkce $z = f(x,y)$, která splňuje rovnici $z^3 - 3xyz = 2$ pro všechna (x,y) z vhodného definičního oboru funkce. Postupujte nejdříve obecně a pak v bodě $(x,y,z) = (1,1,2)$.

Řešení:
Funkci z sice neumíme nějak jednoduše explicitně vyjádřit, ale i tak můžeme zjistit její parciální derivace. Na obě strany rovnosti použijeme $\frac{\partial}{\partial x}$ a $\frac{\partial}{\partial y}$, přičemž využijeme řetízkové pravidlo (z je závislé na proměnných x a y):

$$0 = \frac{\partial\, 2}{\partial x} = \frac{\partial(z^3-3xyz)}{\partial x} = 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xy\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$0 = \frac{\partial\, 2}{\partial y} = \frac{\partial(z^3-3xyz)}{\partial y} = 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} - 3xz - 3xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

a odsud si parciální derivace vyjádříme:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2-xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2-xy}$$

To samozřejmě děláme za předpokladu, že $3z^2 - 3xy \neq 0$. Tento výraz je právě parciální derivaci podle $\tilde{x}$ funkce $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Phi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \tilde{z}^3 - 3\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z} - 2$ tří NEZÁVISLÝCH proměnných, která určuje původní rovnici jako $\Phi\big(x,y,z(x,y)\big) = 0$ (tzv. implicitně určená funkce). Tedy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{z}} = 3\tilde{z}^2 - 3\tilde{x}\tilde{y}\ .$$

V bodě $z(1,1)=2$, který splňuje implicitní rovnici a ve kterém je výraz $3z^2-3xy \neq 0$, pak dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x}_{|(1,1)} = \frac{1\cdot 2}{2^2-1\cdot 1} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}_{|(1,1)} = \frac{1\cdot 2}{2^2-1\cdot 1} = \frac{2}{3}\,.$$

5.4 Najděte derivaci složené funkce $f\circ g$, kde

(i) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $g(s,t)=\begin{pmatrix} st \\ s\cos t \\ s\sin t\end{pmatrix}$ a $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,

(ii) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $g(s,t)=\begin{pmatrix} st \\ e^{st} \\ t^2\end{pmatrix}$ a $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=xy+yz+zx$.

Řešení:
(i) Můžeme buď vyjádřit funkci $h(s,t)=(f\circ g)(s,t)=(st)^2+(s\sin t)^2+(s\cos t)^2=s^2t^2+s^2$ a tu zderivovat

$$h'(s,t)=\Big(\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\partial h}{\partial t}\Big)=(2st^2+2s,2s^2t)$$

nebo použít větu o derivaci složené funkce:

$$h'(s,t)=(f\circ g)'(s,t)=f'(g(s,t))\circ g'(s,t)=$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}_{|g(s,t)}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial s} & \frac{\partial g_1}{\partial t}\\ \frac{\partial g_2}{\partial s} & \frac{\partial g_2}{\partial t}\\ \frac{\partial g_3}{\partial s} & \frac{\partial g_3}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x, & 2y, & 2z\end{pmatrix}_{|g(s,t)}\cdot\begin{pmatrix} t & s\\ \cos t & -s\sin t\\ \sin t & s\cos t\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}2st, & 2s\cos t, & 2s\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t & s\\ \cos t & -s\sin t\\ \sin t & s\cos t\end{pmatrix}=(2st^2+2s,2s^2t)$$

kde $g_i(s,t)$ jsou jednotlivé složky zobrazení g. Přitom je třeba při derivování f mít stejně (zvolené) pořadí proměnných jako je pak pořadí jednotlivých složek g_i v matici derivace zobrazení g (tedy např. pokud bychom derivovali v pořadí podle y, z, x pak pořadí složek v matici derivace g bude odshora postupně g_2, g_3 a g_1.) Změna pořadí jen odpovídá tomu, že si matici derivace zvolíme v jiné bázi.

(ii) Postupujeme podobně: $h(s,t)=(f\circ g)(s,t)=ste^{st}+t^2e^{st}+st^3$

$$h'(s,t)=\Big(\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\partial h}{\partial t}\Big)=\Big((t+st^2+t^3)e^{st}+t^3,(s+s^2t+2t+st^2)e^{st}+3st^2\Big)$$

nebo

$$h'(s,t)=f'(g(s,t))\circ g'(s,t)=\begin{pmatrix}y+z, & z+x, & x+y\end{pmatrix}_{|g(s,t)}\cdot\begin{pmatrix} t & s\\ te^{st} & se^{st}\\ 0 & 2t\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}e^{st}+t^2, & st+t^2, & e^{st}+st\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t & s\\ te^{st} & se^{st}\\ 0 & 2t\end{pmatrix}=$$

$$= \Big((t + st^2 + t^3)e^{st} + t^3, (s + s^2t + 2t + st^2)e^{st} + 3st^2\Big).$$

5.5 Najděte Taylorův polynom druhého stupně pro funkci f v okolí bodu a_0:

(i) $f(x,y) = e^{x^2+y^2} - \cos(x-y)$, $a_0 = (0,0)$,

(ii) $f(x,y) = e^{2xy} - y^2$, $a_0 = (0,0)$,

(iii) $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $a_0 = (1,2,1)$.

V případě (i) a (ii) rozhodněte, zda má funkce v tomto bodě minimum, maximum nebo sedlový bod.

Řešení:
Taylorův polynom stupně (nejvýše) 2, který aproximuje funkci f v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$, je dán vztahem:

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = f(a_0) + f'(a_0)\mathbf{h} + \frac{1}{2!}f''(a_0)(\mathbf{h},\mathbf{h})$$

kde $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

(i) Máme

$$f'_{|(0,0)} = \Big(2xe^{x^2+y^2} + \sin(x-y), 2ye^{x^2+y^2} - \sin(x-y)\Big)_{|(0,0)} = (0,0)$$

$$f''_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2} + \cos(x-y) & 4xye^{x^2+y^2} - \cos(x-y) \\ 4xye^{x^2+y^2} - \cos(x-y) & 2e^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2} + \cos(x-y) \end{pmatrix}_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ máme

$$T_2(\mathbf{h}) = f(0,0) + f'_{|(0,0)}\mathbf{h} + \frac{1}{2!}f''_{|(0,0)}(\mathbf{h},\mathbf{h}) = \frac{1}{2}(h_1,h_2)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}h_1^2 - h_1h_2 + \frac{3}{2}h_2^2.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 3 > 0$, $\Delta_2 = 8 > 0$) je matice $f''_{(0,0)}$ pozitivně definitní, takže v bodě $a = (0,0)$ je lokální minimum.

(ii) Máme

$$f'_{|(0,0)} = \Big(2ye^{2xy}, 2xe^{2xy} - 2y\Big)_{|(0,0)} = (0,0)$$

$$f''_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 4y^2e^{2xy} & 2e^{2xy} + 4xye^{2xy} \\ 2e^{2xy} + 4xye^{2xy} & 4x^2e^{2xy} - 2 \end{pmatrix}_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ máme

$$T_2(\mathbf{h}) = f(0,0) + f'_{|(0,0)}\mathbf{h} + \frac{1}{2!}f''_{|(0,0)}(\mathbf{h},\mathbf{h}) = 1 + \frac{1}{2}(h_1,h_2)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 1 + 2h_1h_2 - h_2^2.$$

Kvadratická forma

$$g(h_1,h_2) = 2h_1h_2 - h_2^2 = h_2(2h_1 - h_2)$$

druhé derivace je indefinitní (např. $g(1,1) = 1 > 0$ a $g(0,1) = -1 < 0$). V bodě $a = (0,0)$ je tedy sedlový bod funkce f.

(iii) Máme

$$f'(a_0) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)_{|a_0} = (4, 4, 12)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 12 \\ 12 & 12 & 24 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \mathbf{h}) = 4 + (4, 4, 12)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2, h_3)\begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 12 \\ 12 & 12 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 4 + 4h_1 + 4h_2 + 12h_3 + 4h_1h_2 + 12h_1h_3 + h_2^2 + 12h_2h_3 + 12h_3^2.$$