6. cvičení z Matematiky 2

28. března - 1. dubna 2016

6.1 Najděte derivaci složeného zobrazení $f \circ g$, kde

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix},$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin(\alpha\beta) \end{pmatrix} .$$

Řešení:
Označme si jednotlivé složky zobrazení f jako $f_1(x,y) = xy$ a $f_2(x,y) = x^2 + y^2$. Pro matici derivace zobrazení f pak máme

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

tedy v jednotlivých řádcích jsou zapsány gradienty jednotlivých složek.

Podobně pro $g_1(\alpha,\beta) = \cos\alpha$ a $g_2(\alpha,\beta) = -\sin(\alpha\beta)$ bude

$$g' = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_2}{\partial \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ -\beta\cos(\alpha\beta) & -\alpha\cos(\alpha\beta) \end{pmatrix} .$$

Takže derivace $f \circ g$ bude

$$(f \circ g)' = f'_{|g} \circ g' = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x = \cos\alpha \\ y = -\sin(\alpha\beta)}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ -\beta\cos(\alpha\beta) & -\alpha\cos(\alpha\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin(\alpha\beta) & \cos\alpha \\ 2\cos\alpha & -2\sin(\alpha\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ -\beta\cos(\alpha\beta) & -\alpha\cos(\alpha\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\alpha\beta)\sin\alpha - \beta\cos(\alpha\beta)\cos\alpha & -\alpha\cos(\alpha\beta)\cos\alpha \\ -2\cos\alpha\sin\alpha + 2\beta\sin(\alpha\beta)\cos(\alpha\beta) & 2\alpha\sin(\alpha\beta)\cos(\alpha\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\alpha\beta)\sin\alpha - \beta\cos(\alpha\beta)\cos\alpha & -\alpha\cos(\alpha\beta)\cos\alpha \\ -\sin(2\alpha) + \beta\sin(2\alpha\beta) & \alpha\sin(2\alpha\beta) \end{pmatrix} .$$

Složky se dají také vypočítat řetízkovým pravidlem bez sestavování matic. Složky zobrazení $f \circ g$ budou $(f \circ g)_i = f_i\big(x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta)\big)$, kde proměnné x a y jsou závislé na α a β jako $x(\alpha,\beta) = g_1(\alpha,\beta)$ a $y(\alpha,\beta) = g_2(\alpha,\beta)$. Matice derivace složeného zobrazení bude mít tvar

$$(f \circ g)' = \begin{pmatrix} \frac{\partial (f\circ g)_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial (f\circ g)_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial (f\circ g)_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial (f\circ g)_2}{\partial \beta} \end{pmatrix}$$

a podle řetízkového pravidla budeme mít např.

$$\frac{\partial (f \circ g)_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial f_2\big(\cos\alpha, -\sin(\alpha\beta)\big)}{\partial \alpha} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \cos\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial(-\sin(\alpha\beta))}{\partial \alpha} =$$

$$= 2x \cdot (-\sin\alpha) + 2y \cdot (-\beta\cos(\alpha\beta)) = -2\cos\alpha \cdot \sin\alpha + 2\beta\sin(\alpha\beta) \cdot \cos(\alpha\beta) .$$

6.2 Najděte derivaci zobrazení $\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} f(x+y,z) \\ f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right) \end{pmatrix}$, kde $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce.

Řešení:
Složky zobrazení Φ označme Φ_1 a Φ_2. Potřebujeme sestavit matici

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{pmatrix} .$$

K výpočtu jednotlivých složek použijeme řetízkové pravidlo. K tomu si potřebujeme nějak označit proměnné funkce f, např. jako $f(u,v)$. Pak můžeme psát

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial f(x+y,z)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z)\cdot\frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z)\cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z)$$

a podobně

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial f(x+y,z)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z)\cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z)$$
$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial f(x+y,z)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z)\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z)\cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z)$$

a pro druhou složku budeme mít

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{\partial f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)\cdot\frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)\cdot 0 = \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = \frac{\partial f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)\cdot\frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right) .$$

Celkem tedy máme

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z) & \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z) & \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z) \\ \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right) & -\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right) + \frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right) & -\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right) \end{pmatrix} .$$

6.3 Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(i) $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

(ii) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

Řešení:
(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'_{|(x,y)} = (3x^2 - 2y, -3y^2 - 2x)$$

Tedy $f'_{|(x,y)} = 0$ právě když $3x^2 = 2y$ a $-3y^2 = 2x$, což je právě když $(x, y) = (0, 0)$ nebo $(x, y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''_{|(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & -6y \end{pmatrix}$$

Pro $(x, y) = (0, 0)$ je $f''_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je $f''_{|(0,0)}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = -4h_1h_2$ a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0, 0)$ je tedy sedlo.

Pro $(x, y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ je $f''_{|(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -4 < 0$, $\Delta_2 = 16-4 = 12 > 0$) je forma negativně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) maximum. Toto maximum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení $f(x, 0) = x^3 + 6$).

(ii) Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu:

$$f'_{|(x,y)} = (4x + 3y - 5, 3x + 8y + 2)$$

Tedy $f'_{|(x,y)} = 0$ právě když $(x, y) = (2, -1)$. Druhá derivace

$$f''_{|(x,y)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

je podle Sylvestrova kritéria pozitivně definitní, tedy v $(2, -1)$ je (ostré) lokální minimum $f(2, -1) = -6$. Toto minimum je ve skutečnosti i globální, což plyne buď z klasifikace všech možných grafů polynomů stupně nejvýše dva o dvou proměnných (jde o speciální případ tzv. *kvadrik*) a nebo si pomůžeme opět doplněním na čtverec:

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y =$$
$$= 2\Big(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{4}y + 2 \cdot x \cdot (-\frac{5}{4}) + 2 \cdot \frac{3}{4}y \cdot (-\frac{5}{4}) + (\frac{3}{4}y)^2 + (-\frac{5}{4})^2\Big) + \frac{15}{4}y - \frac{9}{8}y^2 - \frac{25}{8} + 4y^2 + 2y =$$
$$= 2\Big(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}\Big)^2 + \frac{23}{8}y^2 + \frac{23}{4}y - \frac{25}{8} = 2\Big(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}\Big)^2 + \frac{23}{8}(y + 1)^2 - 6$$

Tedy skutečně $f(x, y) \geq -6$ a rovnost nastává pro $x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4} = 0$ a $y + 1 = 0$ neboli $(x, y) = (2, -1)$.

6.4 Ortogonální transformací převeďte homogenní kvadratický polynom (tedy kvadratickou formu) $g(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$ na diagonální tvar.

Řešení:
(i) Matice $(g)_\mathcal{B}$ kvadratické formy g v dané bázi $\mathcal{B}$ je jednoznačně určena vztahem

$$g(u) = (u)^T_\mathcal{B} \cdot (g)_\mathcal{B} \cdot (u)_\mathcal{B}$$

pro všechna $u \in V$, kde $(u)_\mathcal{B}$ je souřadnicový zápis vektoru u v bázi $\mathcal{B}$.

Ve standardní bázi $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ (tj. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) pro $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tedy máme $(u)_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a

$$g(u) = (x, y) \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

takze $\mathbb{A} = (g)_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Novou ortonormální bázi, ve které bude mít g diagonální tvar, najdeme jako vlastní (normované) vektory matice $\mathbb{A}$. Tedy potřebujeme spočítat kořeny polynomu $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9$. Tedy $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 8$. Po dosazení pak pro $\lambda_1 = 2$ je vlastní (normovaný) vektor např. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pro $\lambda_2 = 8$ je vlastní (normovaný) vektor např. $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a hledaná ortonormální báze je $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$. Matice přechodu $\mathbb{M} = {}_\mathcal{E}(id)_\mathcal{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{E}$ je pak ortogonální, tedy $\mathbb{M}\mathbb{M}^T = \mathbb{E} = \mathbb{M}^T\mathbb{M}$ a $\mathbb{M}^{-1} = \mathbb{M}^T$. V nové bázi $\mathcal{B}$ má matice formy g diagonální tvar $(g)_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. To můžeme ověřit např. i takto: pro přechod mezi souřadnicemi vektoru u v různých bázích máme vztah $(u)_\mathcal{E} = {}_\mathcal{E}(id)_\mathcal{B} \cdot (u)_\mathcal{B} = \mathbb{M} \cdot (u)_\mathcal{B}$ a ten dosadíme do vyjádření formy

$$g(u) = (u)_\mathcal{E}^T (g)_\mathcal{E} (u)_\mathcal{E} = \Big(\mathbb{M} \cdot (u)_\mathcal{B}\Big)^T (g)_\mathcal{E} \Big(\mathbb{M} \cdot (u)_\mathcal{B}\Big) = (u)_\mathcal{B}^T \Big(\mathbb{M}^T (g)_\mathcal{E} \mathbb{M}\Big) (u)_\mathcal{B}$$

tedy v bázi $\mathcal{B}$ má forma matici

$$(g)_\mathcal{B} = \mathbb{M}^T (g)_\mathcal{E} \mathbb{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(ii) Pokud by nás zajímalo nalezení jakékoliv báze (ne nutně ortogonální), ve které bude mít forma diagonální matici (tzv. *polární* báze) můžeme postupovat doplňováním na čtverec (tj. použijeme vzorec $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$):

$$g(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 5\Big(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{5}y + (\frac{3}{5}y)^2\Big) - 5(\frac{3}{5}y)^2 + 5y^2 = 5\Big(x - \frac{3}{5}y\Big)^2 + \frac{16}{5}y^2$$

V nových souřadnicích $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ odpovídajících nové bázi $\mathcal{B}'$ má tedy forma tvar

$$g(x', y') = 5(x')^2 + \frac{16}{5}(y')^2$$

a proto je pozitivně definitní. Příslušná matice přechodu ${}_{\mathcal{B}'}(id)_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pak ale není ortogonální - matice se odvodí ze vztahu

$${}_{\mathcal{B}'}(id)_\mathcal{E} \cdot (u)_\mathcal{E} = (u)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (u)_\mathcal{E}$$

pro všechna $u \in \mathbb{R}^2$.

(iii) K pouhé definitnosti pak také stačí ověřit podmínky Sylvestrova kritéria (tj. znaménka hlavních subdeterminantů matice $\mathbb{A} = (g)_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$):

$\Delta_1 = 5 > 0$
$\Delta_2 = 5 \cdot 5 - (-3) \cdot (-3) = 16 > 0$
Tedy forma g je pozitivně definitní.