7. cvičení z Matematiky 2

4.-8. dubna 2016

7.1 Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x,y) = x - y + 3$ za podmínky $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$.

Řešení:

Použijeme věty:

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina $k \leq n$ a $f : U \to \mathbb{R}$ a $\Phi : U \to \mathbb{R}^k$ jsou spojitě diferencovatelná zobrazení na U. Položme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0 \ \&\ \Phi'_{|a} \text{ je regulární}\}.$$

Jestliže $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M, pak existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplikátory*), že

$$f'_{|a_0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot (\Phi'_i)_{|a_0},$$

kde Φ_i jsou jednotlivé složky zobrazení Φ, tj. $\Phi(a) = (\Phi_1(a), \ldots, \Phi_k(a))$.

(*Regularita* derivace znamená, že její matice má maximální možnou hodnost, tedy hodnost k, tj. její řádky jsou lineárně nezávislé. Množina M se pak nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet k nezávislých vazeb daných zobrazením Φ.)

V našem případě můžeme položit $U = \mathbb{R}^2$ a $\Phi(x,y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 1$. Protože

$$\Phi'_{|(x,y)} = \Big(6x + 5y, 5x + 6y\Big)$$

tak $\Phi'_{|(x,y)}$ *není* regulární (tj. v tomto případě $\Phi'_{|(x,y)} = 0$) právě když $(x,y) = (0,0)$. Nemůže se tedy stát, aby $\Phi(x,y) = 0$ a $\Phi'_{|(x,y)} = 0$. Takže v každém bodě množiny

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1\}$$

je $\Phi'_{|(x,y)}$ regulární. Pro bod $a = (x,y) \in M$ lokálního extrému f na M teď existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1,-1) = f'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda\Big(6x + 5y, 5x + 6y\Big)$$

a

$$3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1.$$

Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme $x = -y$ a po dosazení do vazby získáme kandidáty na extrémy:

$$(1,-1), \qquad (-1,1)$$

s hodnotami

$$f(1,-1) = 5, \qquad f(-1,1) = 1.$$

Potřebujeme ještě zjistit, zda množina M je vůbec omezená (uzavřenost M plyne snadno z toho, že $M = \Phi^{-1}(\{0\})$, neboli že je to vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení Φ).

Doplněním na čtverec
$$1 = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 3\Big(x + \frac{5}{6}y\Big)^2 + \frac{11}{12}y^2$$
zjistíme, že jde o omezenou množinu (konkrétně o (natočenou) elipsu). To lze zjistit i z toho, že kvadratická forma $Q(x,y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2$ je pozitivně definitní (např. pomocí Sylvestrova kritéria).

Spojitá funkce f tak na uzavřené a omezené množině M skutečně nabývá svého maxima a minima v bodech $(1,-1)$ a $(-1,1)$.

7.2 Kruhový talíř o rovnici $x^2 + y^2 \le 1$ je zahřátý na teplotu $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.

Řešení:
Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladu. Vyšetření extrému T na uzavřené a omezené množině $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ rozdělíme na případ (volného) extrému na otevřené množině
$$A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$
a případ vázaného extrému na
$$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$
Jestliže $a = (x,y) \in A^\circ$ je extrém T na A, pak je i extrémem T na A°. Takže musí platit, že
$$T'_{|a} = (2x-1, 4y) = 0$$
tedy $a = (\frac{1}{2}, 0)$ a skutečně je pak $a \in A^\circ$.

Jestliže $a = (x,y) \in \partial A$ je extrém T na A, pak je i (vázaným) extrémem T na $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(x,y) = 0\}$, kde $\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Musí tedy existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že
$$(2x-1, 4y) = T'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda(2x, 2y)$$
a
$$x^2 + y^2 = 1.$$
Dostáváme $a = \pm(1,0)$ nebo $a = (-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Teď víme, že jedinými možnými kandidáty na extrémy jsou body
$$(\frac{1}{2}, 0),\ (1,0),\ (-1,0),\ (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ a } (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}).$$
Protože T nabývá na (uzavřené a omezené) množině A extrému, porovnáním funkčních hodnot
$$T\Big(\frac{1}{2}, 0\Big) = -\frac{1}{4}, \quad T(1,0) = 0, \quad T(-1,0) = 2, \quad T\Big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \frac{9}{4} = T\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$
zjistíme, že T nabývá minima v $(\frac{1}{2}, 0)$ a maxima v $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.

7.3 Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na množině $|x| + |y| \le 1$.

Řešení:
Množina $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| \leq 1\}$ je čtverec a je zřejmě omezená i uzavřená (je vzorem uzavřeného intervalu $(-\infty, 1\rangle$ při spojitém zobrazení $\Psi(x,y) = |x| + |y|$).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$$

a vázaného extrému na množině

$$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\},$$

kterou ale tentokrát nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou čtyři otevřené úsečky (hrany čtverce) a čtyři body (vrcholy čtverce). Procházení těchto možností si usnadníme použitím symetrií $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takových, že zachovávají jak množinu ∂A, tak danou funkci f. Tedy má platit, že $\varphi(\partial A) = \partial A$ a $f \circ \varphi = f$.

Můžeme si zvolit tyto tři (neidentické) symetrie:

$$\begin{aligned}
(x,y) &\mapsto (-x,-y) && \textit{(středová souměrnost)} \\
(x,y) &\mapsto (y,x) && \textit{(souměrnost podle osy } x = y\textit{)} \\
(x,y) &\mapsto (-y,-x) && \textit{(souměrnost podle osy } x = -y\textit{)}
\end{aligned}$$

Extrém na A°:

$f'_{|a} = (2x - y, 2y - x) = 0$ nastává právě pro $a = (0,0) \in A^\circ$ s hodnotou $f(0,0) = 0$.

Extrém na ∂A:

Díky symetriím stačí vyšetřit extrém na

$$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\} \text{ s vazbou } \Phi_1(x,y) = x + y - 1$$

a na

$$U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y < 0\} \text{ s vazbou } \Phi_2(x,y) = x - y - 1$$

tj. hrany čtverce A bez koncových bodů (a dále už pak jen vrchol $(1,0)$ čtverce A jako samostatnou vazbu).

Pro extrém na U_1 má tedy existovat $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, že

$$(2x - y, 2y - x) = f'_{|a} = \lambda_1 \Phi'_{1|a} = \lambda_1(1,1)$$

a

$$x + y = 1,$$

tedy $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in U_1$ a $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Podobně pro extrém na U_2 má existovat $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, že

$$(2x - y, 2y - x) = f'_{|a} = \lambda_2 \Phi'_{2|a} = \lambda_2(1,-1)$$

a

$$x - y = 1,$$

tedy $(x,y) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \in U_2$ a $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

Zbývá bod $(1,0)$ s hodnotou $f(1,0) = 1$.

Minimum tedy nabývá funkce v bodě $(0,0)$ a maximum ve vrcholech čtverce (které jsme získali z bodu $(1,0)$ pomocí symetrií).

7.4 Najděte extrémy funkce $f(x,y,z) = x - y + 3z$ s vazebnou podmínkou $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$.

Řešení:
Postupujeme podobně jako v předchozích příkladech. Položíme $\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$. Protože

$$\Phi'_{|(x,y,z)} = (2x, 2y, 8z)$$

tak $\Phi'_{|(x,y,z)} = 0$ právě když $(x,y,z) = (0,0,0)$, což ale zase nemůže splnit vazbu. Takže v každém bodě množiny

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$$

je $\Phi'_{|(x,y,z)} \neq 0$. Pro bod $a = (x,y,z) \in M$ lokálního extrému f na M teď existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1,-1,3) = f'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda(2x, 2y, 8z)$$

a

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 4.$$

Proto musí být $\lambda \neq 0$ a vyjádřením proměnných

$$x = \frac{1}{2\lambda} \qquad y = -\frac{1}{2\lambda} \qquad z = \frac{3}{8\lambda}$$

a dosazením do vazby získáme řešení $a = \pm\frac{2}{\sqrt{17}}(4,-4,3)$ a $\lambda = \pm\frac{\sqrt{17}}{16}$. Protože f nabývá extrému na M (neboť M je evidentně omezená a uzavřená), jsou uvedené body skutečně (absolutní) extrémy a funkční hodnoty jsou $f(a) = \pm 2\sqrt{17}$.